Quaderni di Statistica e Matematica
applicata alle Scienze Economico-Sociali
VOLUME III DICEMBRE 1980

SULLA UNIFORME CORRETTEZZA DI UN TEST CHE CONSENTE IL CONTROLLO DELL'ERRORE DI PRIMA SPECIE

Giorgio VITTADINI *

1. Introduzione

Recentemente G. Landenna e D. Marasini [1] hanno introdotto nella letteratura statistica un test che consente la verifica simultanea di due ipotesi H_1 ed H_2, dove H_1 ed H_2 postulano che le ignote medie μ_1 e μ_2 di due v.c. (variabili casuali) normali indipendenti con identica ma ignota varianza σ^2 siano uguali rispettivamente ai prefissati valori μ_1^* e μ_2^*.
Come è noto, il problema della verifica simultanea di due ipotesi del tipo sopra descritto è ancora pressochè insoluto anche per la difficoltà di identificare una regione di accettazione dell'ipotesi $K_0 : H_1 \cap H_2$ che sia "ottima" nel senso di J. Neyman ed E. Pearson.
Fra i tentativi che sono stati fatti per dare soluzione al problema in questione dev'essere annoverato, per l'appunto, quello di G. Landenna e D. Marasini. Detti autori, partendo dal presupposto, sovente imposto dalle situazioni concrete, che una delle due ipotesi che si intendono verificare simultaneamente rivesta maggiore importanza dell'altra, pervengono ad un test che consente di dominare l'errore di prima specie. E ciò nel senso che, prescelti due valori α ed α' $(0 < \alpha' < \alpha < 1)$, la verifica si realizza a livello α per K_0 e, in pari tempo, a livello α' per l'ipotesi che fra H_1 ed H_2 è ritenuta preminente.
Il test in questione, inoltre, si basa su una regione di accettazione che si identifica in modo assai semplice ricorrendo ai valori critici forniti dalle tavole della "t" unidimensionale; è tale che le funzioni di potenza associate alle alternative (considerate qui, per motivi di semplicità, nella sola versione unidirezionale) a K_0 e cioè:
$K_1 : \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$, $K_2 : \bar{H}_1 \cap H_2$, $K_3 : H_1 \cap \bar{H}_2$, dove $\bar{H}_1$ ed $\bar{H}_2$ postulano rispettivamente $\mu_1 > \mu_1^*$ $\mu_2 > \mu_2^*$, convergono ad uno al divergere di almeno uno dei due parametri di non centralità; è altresì corretto in quanto, per ognuna delle suddette alternative a K_0, la probabilità di rifiutare l'ipotesi medesima quando è vera è sempre minore della probabilità di rifiutarla quando è falsa.
In questa nota, dopo aver richiamato brevemente alcune proprietà della v.c. bidimensionale di Student (§ 2) e riproposto il test (§ 3) di G. Landenna e D. Marasini, viene esaminato se il medesimo, nel caso di problema di decisione multipla (§ 4), soddisfa anche alle proprietà della "uniforme correttezza" (§ 5), nel senso proposto da E. L. Lehmann.
Il risultato di detto esame è che il test non gode della suddetta proprietà nei riguardi di K_1, K_2 e K_3; viene comunque individuato uno dei possibili insiemi di alternative a K_0 per le quali la proprietà in questione sussiste.

* Istituto di Scienze Statistiche e Matematiche "M. Boldrini" Milano.

2. Alcune proprietà della T di Student Bidimensionale

Sia (T_1, T_2) una v.c. bidimensionale con f.d. (funzione di densità):

$$\varphi(t_1,t_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{g+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)\pi g}\left(1+\frac{t_1^2}{g}+\frac{t_2^2}{g}\right)^{-\frac{g+2}{2}}, \tag{1}$$

dove g sono i g.d.l. (gradi di libertà) della v.c. in questione.
Si dimostra che:

i) le due marginali T_1 e T_2 sono anch'esse v.c. di Student con f.d.

$$\Theta_i(t_i) = \frac{\Gamma\left(\frac{g+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)\sqrt{\pi g}}\left(1+\frac{t_i^2}{g}\right)^{-\frac{g+1}{2}} \qquad (i = 1,2) \tag{2}$$

ciascuna con g g.d.l.;

ii) le v.c. condizionate $(T_2 \mid t_1)$, avendo f.d.:

$$\Psi(t_2|t_1) = \frac{\varphi(t_1,t_2)}{\Theta_1(t_1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{g+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g+2}{2}\right)\sqrt{\pi(g+t_1^2)}}\left(1+\frac{t_2^2}{g+t_1^2}\right)^{-\frac{g+2}{2}} \tag{3}$$

non sono v.c. di Student a meno che la condizionante non assuma i valori $t_1 = \pm 1$ nei quali casi la (3) assume la forma:

$$\Psi(t_2|\pm 1) = \frac{\Gamma\left(\frac{g+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g+1}{2}\right)\sqrt{\pi(g+1)}}\left(1+\frac{t_2^2}{g+1}\right)^{-\frac{g+2}{2}} \tag{4}$$

e si identifica con la f.d. di una v.c. di Student con (g + 1) g.d.l.
Avendo verificato la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon(g+t_1^2)^{1/2}} \Psi(t_2|t_1)\,dt_2 = \int_{-\infty}^{\varepsilon(g+1)^{1/2}} \Psi(t_2|1)\,dt_2, \tag{5}$$

dove ε è una costante arbitraria positiva, fissati due valori α' e α $(0<\alpha'<\alpha<1)$, G. Landenna e D. Marasini identificano nel piano $(t_1\ t_2)$ la seguente regione R_0:

$$R_0 : \begin{cases} -\infty < t_1 < t_1^* \\ -\infty < t_2 < \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2} \end{cases} \tag{6}$$

per la quale risulta:

$$\int_{R_0} \varphi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 = 1 - \alpha ,$$

dove:

$$\bar{\varepsilon} = t_2^* (g+1)^{-1/2} ,$$

mentre t_1^* e t_2^* sono le radici delle equazioni:

$$\int_{-\infty}^{t_1^*} \theta_1(t_1)\, dt_1 = 1 - \alpha' , \quad \int_{-\infty}^{t_2^*} \psi(t_2 \mid 1)\, dt_2 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha'} ,$$

che si ricavano dalle usuali tavole della v.c. unidimensionale di Student.
E' immediato osservare che la regione R_0 risulta strutturata, come evidenzia la (6), in modo che la componente T_1 della v.c. (T_1, T_2) esereiti il ruolo di condizionante della v.c. T_2.

3. Un test impiegabile nell'analisi delle medie

Sulla base di quanto sopra, il test di G. Landenna e D. Marasini trova la seguente formulazione.
Siano X_1 ed X_2 due v.c. normali ed indipendenti con uguale ma ignota varianza σ^2 e medie μ_1 e μ_2 ignote e si voglia effettuare la verifica dell'ipotesi:

$$K_0 : H_1 \cap H_2,$$

dove H_1 ed H_2 postulano rispettivamente: $H_1 : \mu_1 = \mu_1^*$, $H_2 : \mu_2 = \mu_2^*$.
La verifica in questione vuol essere condotta sotto la condizione che H_1 sia da intendersi come preminente rispetto ad H_2.
Per tener conto di tale fatto vengono fissati due valori α ed α' $(0 < \alpha' < \alpha < 1)$ che costituiscono: α il livello di probabilità per l'errore di prima specie nei riguardi di K_0; α' il livello di probabilità per l'errore di prima specie nei riguardi di H_1.
Con tali premesse, scelti in X_1 ed in X_2 due campioni bernoulliani di ampiezza n_1 ed n_2, i due rapporti:

$$t_1 = \frac{m_1 - \mu_1^*}{s\sqrt{n_1}} \quad , \quad t_2 = \frac{m_2 - \mu_2^*}{s\sqrt{n_2}} \tag{7}$$

costruiti coi risultati campionari x_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2,...,n_i)$ vengono a presentarsi come determinazione di una v.c. bidimensionale (T_1, T_2) di Student relativa a $g = g_1 + g_2$ g.d.l., essendo m_1 ed m_2 le medie dei predetti risultati, mentre:

$$s^2 = \frac{g_1 s_1^2 + g_2 s_2^2}{g_1 + g_2}$$

è la stima della varianza comune σ^2, stima nella quale:

$$s_i^2 = \frac{1}{g_i} \sum_j (x_{ij} - m_i)^2 \quad , \quad g_i = n_i - 1 \quad , \quad (i = 1,2) \; .$$

Così stando le cose, la verifica dell'ipotesi $K_0 : H_1 \cap H_2$, sotto la condizione che H_1 debba ritenersi preminente rispetto a H_2, può essere realizzata facendo riferimento alla regione R_0 definita con la (6) che, stante la sua struttura e per quanto si è detto alla fine del precedente numero, fornisce, per l'appunto, nei riguardi dell'errore di prima specie la duplice garanzia rispetto a K_0 e ad H_1.
In particolare, K_0 verrà accettata se i due rapporti (7) danno luogo ad una determinazione (t_1, t_2) che appartiene ad R_0; diversamente l'ipotesi medesima verrà rifiutata.
Le alternative unidirezionali a $K_0 : H_1 \cap H_2$ sono le seguenti:

$$K_1 : \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda_1 > 0 \;, \quad \lambda_2 > 0 \;, \tag{8}$$

$$K_2 : \bar{H}_1 \cap H_2 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda_1 > 0 \;, \quad \lambda_2 = 0 \;, \tag{8'}$$

$$K_3 : H_1 \cap \bar{H}_2 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda_1 = 0 \;, \quad \lambda_2 > 0 \;, \tag{8''}$$

dove: $\bar{H}_1 : \mu_1 > \mu_1^*$, $\bar{H}_2 : \mu_2 > \mu_2^*$, mentre λ_1 e λ_2 sono i corrispondenti parametri di non centralità.
Il test di Landenna—Marasini è corretto ed, inoltre, è tale che le funzioni di potenza relative alle alternative sopra indicate tendono a 1 al divergere di almeno uno dei parametri di non centralità.

4. Una scelta dell'alternativa come problema di decisione multipla

La semplice procedura di verifica dell'ipotesi K_0, non permette di stabilire, nel caso di rifiuto dell'ipotesi medesima, quale delle ipotesi alternative accettare.
L'accettazione di una delle (8), (8'), (8'') rientra in un problema di decisione multipla che può venir affrontato secondo una procedura proposta da E.L. Lehmann [2].
Più precisamente si indica con D_i $(i = 0, 1, 2, 3)$:

$D_i = K_0^{xi} \cap K_1^{xi} \cap K_2^{xi} \cap K_3^{xi}$ dove $xi = 1$ se K_i è vera $xi = -1$ se K_i è falsa

una decisione corrispondente a una situazione in cui una ipotesi K_i è ritenuta vera mentre le restanti sono reputate false.
Lo spazio campionario viene suddiviso in regioni, ognuna delle quali sarà regione di accettazione per una particolare ipotesi e regione di rifiuto per le rimanenti, in conformità con la particolare decisione D_i $(i = 0,1,2,3)$.
Tenendo presente la struttura della (6) le regioni R_1, R_2, R_3 del piano $(t_1 t_2)$ rispettivamente regioni di accettazione delle ipotesi K_1, K_2, K_3 sono così definite:

$$R_1 \begin{cases} t_1^* < t_1 < \infty \\ \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2} < t_2 < \infty \end{cases} \tag{9}$$

$$R_2 \begin{cases} t_1^* < t_1 < \infty \\ -\infty < t_2 < \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2} \end{cases} \tag{9'}$$

$$R_3 \begin{cases} -\infty < t_1 < t_1^* \\ \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2} < t_2 < \infty\,. \end{cases} \tag{9''}$$

5. Uniforme correttezza

In questa procedura di decisione multipla assume un'altra veste anche la proprietà della correttezza. Il test è corretto in senso stretto (uniformemente corretto) se la probabilità di accettare una qualunque delle ipotesi, quando è vera, è maggiore della probabilità di accettarla quando è falsa (Mangano [3]). In altri termini, si dirà che il test in esame è uniformemente corretto se, oltre ad essere corretto, sono soddisfatte le diseguaglianze seguenti:

$$P\{(T_1,T_2) \in R_1 \mid K_1\} \geqslant \max_{i_1} P\{(T_1,T_2) \in R_1 \mid K_{i_1}\} \quad (i_1 = 0,2,3) \tag{10}$$

$$P\{(T_1,T_2) \in R_2 \mid K_2\} \geqslant \max_{i_2} P\{(T_1,T_2) \in R_2 \mid K_{i_2}\} \quad (i_2 = 0,1,3) \tag{10'}$$

$$P\{(T_1,T_2) \in R_3 \mid K_3\} \geqslant \max_{i_3} P\{(T_1,T_2) \in R_3 \mid K_{i_3}\} \quad (i_3 = 0,1,2) \tag{10''}$$

Con tali propositi si consideri, ad esempio, la (10'').
Fissate le due alternative:

$$K'_3 : \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \lambda'_2$$

$$K''_1 : \lambda_1 > 0 \qquad \lambda_2 = \lambda''_2$$

con $\lambda''_2 > \lambda'_2$ esiste senz'altro un intorno ε dell'origine sufficientemente piccolo tale che per $\forall \lambda_1 \in \varepsilon$ si verifica la disuguaglianza:

$$P\{(T_1,T_2) \in R_3 \mid K'_3\} < P\{(T_1,T_2) \in R_3 \mid K''_1\} \tag{11}$$

il che, pertanto, esclude la possibilità del verificarsi della (10") medesima.

Ai fini della verifica della (11) si osservi che le due v.c. $\tilde{T}_1$ e $\tilde{T}_2$ non centrali associate ordinatamente alle componenti T_1 e T_2 della v.c. bidimensionale (T_1, T_2) di Student, di cui le (7) costituiscono una determinazione, possono scriversi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} T_1(\lambda_1) &= T_1 + \frac{\lambda_1}{Y} \\ T_2(\lambda_2) &= T_2 + \frac{\lambda_2}{Y} \end{aligned} \tag{12}$$

dove λ_1 e λ_2 sono i parametri di non centralità definiti da:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{n_1}\,\delta_1}{\sigma} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{n_2}\,\delta_2}{\sigma}$$

$$\delta_1 = (\mu_1 - \mu_1^*) \, , \qquad \delta_2 = (\mu_2 - \mu_2^*)$$

T_1 e T_2 sono le componenti di (T_1, T_2), mentre:

$$Y = (\chi^2/g)^{1/2}$$

é una v.c. Chi Quadrato con g g.d.l.

Impiegando le (12), le due probabilità che compaiono nella (11) possono scriversi:

$$\begin{aligned} P\{(T_1,T_2) \in R_3 \mid K_3'\} &= P\{[T_1, \tilde{T}_2(\lambda_2')] \in R_3\} \\ P\{(T_1,T_2) \in R_3 \mid K_1''\} &= P\{[\tilde{T}_1(\lambda_1), \tilde{T}_2(\lambda_2'')] \in R_3\} \end{aligned} \tag{13}$$

od anche, data la struttura della regione R_3 fornita dalla (9"):

$$\begin{aligned} P\{[T_1, \tilde{T}_2(\lambda_2')] \in R_3\} &= P\{T_1 < t_1^* \, , T_2 + \frac{\lambda_2'}{Y} > \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2}\} = \\ &= P\{[T_1 < t_1^* \, , T_2 > \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2} - \frac{\lambda_2'}{Y}\} \\ P\{[\tilde{T}_1(\lambda_1), \tilde{T}_2(\lambda_2'')] \in R_3\} &= P\{T_1 + \frac{\lambda_1}{Y} < t_1^* \, , T_2 + \frac{\lambda_2''}{Y} > \bar{\varepsilon}(g + t_1^2)^{1/2}\} = \\ &= P\{T_1 < t_1^* - \frac{\lambda_1}{Y} \quad , \ T_2 > \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2} - \frac{\lambda_2''}{Y}\} \end{aligned} \tag{14}$$

Ponendo per semplicità di scrittura:

$$\bar{t}_2 = \bar{\varepsilon}\,(g + t_1^2)^{1/2}$$

ed indicata con $\varphi\,(t_1, t_2, y)$ la funzione di densità della v.c. (T_1, T_2, Y), la differenza $\Delta\,(\lambda_1)$ delle due probabilità che figurano nella disuguaglianza (11), cioè:

$$\Delta(\lambda_1) = P\{[T_1, \tilde{T}_2(\lambda_2')] \in R_3\} - P\{[\tilde{T}_1(\lambda_1), \tilde{T}_2(\lambda_2'')] \in R_3\},$$

può scriversi:

$$\Delta(\lambda_1) = \int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^{t_1^*} \int_{\tilde{t}_2 - \frac{\lambda_2'}{y}}^{\infty} \varphi(t_1, t_2, y) dt_1 dt_2 - \int_{-\infty}^{t_1^* - \frac{\lambda_1}{y}} \int_{\tilde{t}_2 - \frac{\lambda_2''}{y}}^{\infty} \varphi(t_1, t_2, y) dt_1 dt_2 \Big] dy$$

Tenendo presente la struttura della regione R_3 e ricordando che si è posto $\lambda_2'' > \lambda_2'$, la differenza $\Delta(\lambda_1)$ può assumere la forma seguente:

$$\Delta(\lambda_1) = \int_0^\infty \Big[\int_{t_1^* - \frac{\lambda_1}{y}}^{t_1^*} \int_{\tilde{t}_2 - \frac{\lambda_2'}{y}}^{\infty} \varphi(t_1, t_2, y) dt_1 dt_2 - \int_{-\infty}^{t_1^* - \frac{\lambda_1}{y}} \int_{\tilde{t}_2 - \frac{\lambda_2''}{y}}^{\tilde{t}_2 - \frac{\lambda_2'}{y}} \varphi(t_1, t_2, y) dt_1 dt_2 \Big] dy. \quad (15)$$

Si può subito notare che la funzione $h(\lambda_1, y)$ fra parentesi quadra nella (15) assume valori negativi se $\lambda_1 = 0$ e che, essendo continua rispetto a λ_1, esiste senz'altro un intorno ε dell'origine di $\lambda_1 = 0$ sufficientemente piccolo dove, $\forall \lambda_1 \in \varepsilon$, si ha:

$$\Delta(\lambda_1) = P\{[T_1, \tilde{T}_2(\lambda_2')] \in R_3\} - P\{[\tilde{T}_1(\lambda_1), \tilde{T}_2(\lambda_2'')] \in R_3\} =$$

$$= \int_0^\infty h(\lambda_1, y) dy < 0$$

ossia:

$$P\{[T_1, \tilde{T}_2(\lambda_2')] \in R_3\} < P\{[\tilde{T}_1(\lambda_1), \tilde{T}_2(\lambda_2'')] \in R_3\}$$

e, quindi:

$$P\{(T_1, T_2) \in R_3 | K_3'\} < P\{(T_1, T_2) \in R_3 | K_1''\}$$

in accordo con la (11). Da ciò discende che la (10″) non può essere verificata e, cioè, che il test in questione, con le prefissate alternative (8), (8′), (8″), non gode della proprietà della uniforme correttezza.

Tuttavia, poichè si può dimostrare che le disuguaglianze (10″), (10′), (10) sono soddisfatte se si considera rispettivamente:

i) $\lambda''_2 \leqslant \lambda'_2 \quad , \quad \forall \lambda_1$

ii) $\lambda''_1 \leqslant \lambda'_1 \quad , \quad \forall \lambda_2$

iii) $\lambda''_2 \geqslant \lambda'_2 \quad , \quad \lambda''_1 \geqslant \lambda'_1$

da i), ii) e iii) si ottiene uno dei possibili insiemi di ipotesi alternative a K_0 per il quale il test risulta, oltre che corretto, uniformemente corretto. Più precisamente detto insieme è il seguente:

$K'_1 : \lambda_1 = \lambda'_1 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda'_2 \quad ,$

$K'_2 : \lambda_1 = \lambda'_1 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad ,$

$K'_3 : \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda'_2 \quad ,$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. LANDENNA, D. MARASINI (1980). The two-dimensional Student distribution and a test with the control of the type I error. *Atti dell'International Summer School,* Trieste.

[2] E.L. LEHMANN (1957). Theory of some multiple decision problems, I. *The Annals of Mathematical Statistics,* vol. 28, pp. 1-25.

[3] G. MANGANO (1970). *Su alcune proprietà di un test impiegabile nella analisi della varianza*, Vita e Pensiero, Milano.

RESUME

De un test "uniformément sans biais" qui permet le controle de l'erreur de I° tipe.
Dans cet article on éxamine si un test, qui a eté récemment proposé par G. Landenna et D. Marasini, et "uniformément sans biais" dans le sense de E.L. Lehmann.

SUMMARY

On the uniform unbiasdness of a test ensuring the control of the type I error.
In this paper is examined if a test recently proposed by G. Landenna and D. Marasini is "uniformily unbiased" according to E.L. Lehmann definition.