Capitolo 6

PROPRIETA'LOGICAMENTE INCONSISTENTI DI SOLUZIONI INDETERMINATE

6.1. INTRODUZIONE

Si sono viste nei capitoli precedenti le ragioni dell'indeterminatezza sotto il profilo analitico .
Nel caso in cui si e' interessati al valore assunto dalle variabili latenti e degli errori in corrispondenza delle singole unita' statistiche e la media dei coefficienti di covarianza minima tra soluzioni con identica matrice di varianze covarianze e' molto inferiore ad uno, le soluzioni stesse sono inattendibili per qualunque scopo interpretativo.
I risultati delle applicazioni empiriche, contenute della 2^ parte del lavoro,confermeranno queste conclusioni.
Le conseguenze negative dell'indeterminatezza delle soluzioni sulla validita' del modello sono pero', per altri aspetti, piu' profonde e radicali e prescindono dall'entita' delle differenze tra soluzioni misurate dal coefficiente di covarianza media minima.
In questo capitolo si mettono in luce proprieta' logicamente inconsistenti di ogni soluzione del modello Lisrel e dei modelli ad esso collegati.

6.2. L'INDETERMINATEZZA DEL MODELLO:APPROCCIO ALGEBRICO

Si ricordi innanzitutto che nel linguaggio degli spazi vettoriali si definiscono :

spazio euclideo R^N n-dimensionale l'insieme di tutti i vettori n-dimensionali per cui valgono le normali operazioni di addizione e moltiplicazione;

sottospazio vettoriale di uno spazio V_K un sottoinsieme V_B di V_K tale che per ogni $\underline{a} \in V_B$ e $\underline{b} \in V_B$ $(\underline{a} + \underline{b}) \in V_B$ e per ogni scalare α $\alpha\underline{a} \in V_B$ (in simboli $V_B \subset V_K$);

Si noti che l'insieme V_C di tutte le combinazioni lineari di un insieme di vettori $\{ \underline{s}_1 , \underline{s}_2 .... \underline{s}_g \}$ appartenenti a V_K e' un sottospazio di V_K;

dimensione di uno spazio vettoriale il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in esso contenuto;

spazio ortogonale a uno spazio V_P uno spazio V_Q formato da $\underline{q}_1$ vettori ortogonali ad ogni vettore appartenente allo spazio V_P (in simboli $V_P \perp V_Q$ $\underline{q}_1 \perp V_P$);

somma diretta degli spazi ortogonali V_J e $V\perp_J$

la somma dei due spazi $V\perp_N = V_J \oplus V\perp_J$ qualora ogni vettore $\underline{c} \in V\perp_N$ puo' essere espresso in modo univoco come somma di $\underline{e}$ ed $\underline{f}$ dove $\underline{e} \in V_J$, $\underline{f} \in V\perp_J$;

complemento ortogonale di V_F rispetto a $V\perp_N$ lo spazio $V\perp_F$ ortogonale a V_F tale che l'intero spazio $V\perp_N$ e' decomponibile nel seguente modo:

$V\perp_N = V_F \oplus V\perp_F$;

proiezione ortogonale del vettore $\underline{m} \in V\perp_N$ sullo spazio V_J

la trasformazione

$$\underline{d} = \underline{m} P_J$$

dove $V\perp_N = V_J + V\perp_J$ e $\underline{m} = \underline{d} + \underline{r}$;

P_J e'una matrice quadrata,simmetrica e idempotente che prende il nome di proiettore ortogonale su V_J lungo $V\perp_J$.

La sua forma esplicita e'la

la seguente: $$P_J = S'(SS')^{-1} S$$

con S matrice le cui righe sono una base per lo spazio V_J (per SS'non singolare);

spazi vettoriali isomorfi due spazi V_C e V_D tra cui esiste una corrispondenza biunivoca tale che dati due insiemi di vettori :

$$C = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ . \\ \underline{c}_i \\ \underline{c}_k \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ . \\ \underline{d}_i \\ \underline{d}_k \end{bmatrix}$$

con $C \in V_C$; $D \in V_D$

si ha:

$$C = \Omega D \quad ; \quad D = \Omega^{-1} C$$

con Ω matrice quadrata non singolare.

I due spazi V_C e V_D sono identici a meno della trasformazione lineare Ω.

Cio' premesso si puo' riformulare il problema del modello Lisrel (1.21) utilizzando il linguaggio degli spazi vettoriali.

Si definisce $V\perp_N$ come sottospazio di R^N formato da tutti i vettori n-dimensionali centrati e V_J, V_T, V_G, V_E, V_D come sottospazi di $V\perp_N$ rispettivamente delle variabili osservate delle variabili latenti,degli errori nelle equazioni, degli errori nelle variabili Tali spazi sono formati attra verso combinazione lineare delle righe delle matrici J,T,G, E,D .

Per le ipotesi del modello Lisrel si ha:

$$(6.1)\quad \dim V\perp_N = n-1 \ ; \ \dim V_J = m+r \ ; \ \dim V_T = q \ ; \ \dim V_G = p \ ;$$

$$\dim V_E = m \ ; \ \dim V_D = r \ ;$$

$$(6.2)\quad V_{T \oplus G \oplus E \oplus D} = V_{T \oplus G} \oplus V_{E \oplus D}$$

$$= V_T \oplus V_G + V_E \oplus V_D$$

poiche ' gli spazi V_T , V_G , V_E ,V_D sono ortogonali;

$$(6.3)\quad P_{T \oplus G \oplus E \oplus D} = P_{T \oplus G} + P_{E \oplus D} = P_T + P_G + P_E + P_D$$

con P_T, P_G, P_E, P_D proiettori ortogonali sugli spazi V_T, V_G, V_E, V_D per la (6.2) ;

$$(6.4)\qquad V\perp_N \supset V_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$$

e:

$$(6.5)\qquad V\perp_N = V_{T \oplus G \oplus E \oplus D} + V^{\perp}_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$$

in quanto i vettori di $V_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$ sono combinazioni lineari di vettori di $V\perp_N$;

$$(6.6)\qquad \dim (V^{\perp}_{T\ G\ E\ D}) = n - 1 - m - r - p - q$$

per la (6.5) ;

$$(6.7)\quad P\perp_N = P_T + P_G + P_E + P_D + P^{\perp}_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$$

con $P^{\perp}_{N}$, $P^{\perp}_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$ proiettori ortogonali

sugli spazi $V^{\perp}_{N}$, $V_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$;

(6.8) $V_{J} \quad V_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$

in quanto i vettori di V_{J} sono formati attraverso combinazione lineare dei vettori di $V_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$;

(6.9) $J P^{\perp}_{(T \oplus G \oplus E \oplus D)} = 0$;

(6.10) $J P_{(T \oplus G \oplus E \oplus D)} = 0$;

sono i proiettori dei vettori riga della matrice J sugli spazi $V_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$ e $V^{\perp}_{T \oplus G \oplus E \oplus D}$;

Per quanto detto il modello Lisrel (1.21) puo' essere riformulato nel modo seguente :

(6.11) $J = J P_{T} + J P_{G} + J P_{E} + J P_{D}$

ed e' possibile reinterpretare il significato dell'indeterminatezza delle sue soluzioni.

Le m+r variabili osservate sono una combinazione lineare di q variabili latenti, p errori nelle equazioni, m ed r errori nelle variabili.Siccome V_{T} , V_{G} , V_{E} , V_{D} sono ortogonali nel modello Lisrel si suppone che le m+r variabili osservate sono nello spazio $V_{T} \oplus V_{G} \oplus V_{E} \oplus V_{D}$ .Dalle assunzioni fatte si evince che le variabili latenti , e gli errori nelle variabili e nelle equazioni sono una base dello spazio $V_{T} \oplus V_{G} \oplus V_{E} \oplus V_{D}$ di dimensioni p+q+m+r.

Determinare le soluzioni del modello Lisrel significa decomporre lo spazio delle variabili centrate $V^{\perp}_{N}$ nella somma diretta di $V_T \oplus V_G \oplus V_E \oplus V_D$ e quindi decomporre i decomporre i vettori delle variabili osservate che costituiscono le righe della matrice J nella somma delle loro proiezioni sugli spazi V_T, V_G, V_E, V_D.

Da tutto cio' si deduce l'indeterminatezza delle soluzioni. Infatti da (6.6) si deduce che qualora, come usualmente avviene il numero delle osservazioni e' maggiore del numero delle variabili latenti e degli errori :

(6.12) $n-1-p-q-m-r > 0$

non e' univoco il modo di decomporre lo spazio $V\perp_N$ e quindi non e' univoco il modo di decomporre le righe della matrice J. Esistono percio' infiniti insiemi di matrici (T,G,E,D) che soddisfano le assunzioni del modello.

6.3. L'INDETERMINATEZZA:INSUFFICIENZA DELLE INFORMAZIONI PROVENIENTI DALLE OSSERVAZIONI

Prima di proseguire nella trattazione secondo un approccio algebrico e' necessario ripresentare il probema dell'indeterminatezza in una altra veste che permettera' nei successivi paragrafi di mettere in luce alcune incongruenze logiche del modello.

Dato il modello Lisrel (1.21) e' possibile introdurre la seguente uguaglianza:

$$(6.13)\quad \begin{bmatrix} T \\ G \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ L_X(I-A)^{-1}P & L_X(I-A)^{-1} & I & 0 \\ L_Y & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \\ E \\ D \end{bmatrix}$$

Si puo' osservare che la matrice dei coefficienti che appare nella (6.13) e' non singolare in quanto e' unipotente vale a dire identica alla sua inversa. Da cio' si deduce che gli spazi vettoriali generati da:

$$\begin{bmatrix} T \\ G \\ X \\ Y \end{bmatrix} \text{ e da } \begin{bmatrix} T \\ G \\ E \\ D \end{bmatrix}$$

sono isomorfi.

Dalla (1.26) si ricava che:

$$(6.14) \qquad JT' = S_{JT} = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P S_T \\ \\ L_Y S_T \end{bmatrix}$$

$$(6.15) \qquad JG' = S_{JG} = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} S_G \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi, ricordando la formula della matrice di correlazione parziale:

$$(6.16) \qquad S_{(T/J)} = S_T - S_{TJ} S_J^{-1} S_{JT}$$

le matrici di correlazione parziale delle variabili latenti, degli errori nelle equazioni, date le variabili osservate assume la seguente configurazione:

$$(6.17) \quad S_{(T/J)} = S_T - S_T L_Y{}' S_J^{-1} L_Y S_T - S_T P' (I-A')^{-1} L_X{}' S_J^{-1} L_X (I-A)^{-1} P S_T$$

$$(6.18) \qquad S_{(G/J)} = S_G - S_G L_X{}' S_J^{-1} L_X S_G$$

La (6.17) e la (6.18) sono matrici definite positive con gli elementi sulla diagonale principale non nulli.

Esiste quindi una parte della struttura della varianze e

delle covarianze delle variabili latenti e degli errori nelle equazioni non attribuibile alle informazioni tratte dalle variabili osservate. Poiche' le uniche informazioni a disposizione sono quelle ricavate dalle variabili osservate, cio' significa che variabili latenti ed errori nelle equazioni sono ricavati in modo arbitrario. E a maggior ragione in modo arbitrario sono ricavati gli errori nelle variabili in quanto le informazioni tratte dalle variabili osservate non sono neanche sufficienti a determinare univocamente variabili latenti ed errori nelle equazioni.
E' una prima conferma dell'indeterminatezza delle soluzioni del modello, gia' messa in luce sotto il profilo analitico nel capitolo 4^.

6.4. INDETERMINATEZZA DI VARIABILI ADDIZIONALI

Le argomentazioni del paragrafo precedente possono far ritenere che l' indeterminatezza delle soluzioni sia dovuta ad un'insufficienza di informazioni fornite dalle variabili osservate.
Allo scopo di ovviare a questo problema, e aggiungere informazioni utili per ricavare le soluzioni del modello analogamente a quanto e' stato fatto per il modello fattoriale (Kestelman 1952 Guttman 1955) si puo' introdurre un insieme di p+q nuove variabili addizionali, centrate e incorrelate tra loro e con le variabili osservate.

Siano le variabili addizionali:

$$B = \begin{bmatrix} K \\ \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{-1} \\ \cdot \\ k_{-f} \\ \cdot \\ k_{-q} \\ r_{-1} \\ \cdot \\ r_{-u} \\ \cdot \\ r_{-q} \end{bmatrix} ;$$

$$(6.19) \quad KX' = 0 \;;\; KY' = 0 \;;\; BX' = 0 \;;\; BY' = 0 \;;$$

$$BB' = I_{p+q}$$

con K matrice di dimensioni (q,n), R matrice di dimensioni (p,n).

Si puo' ora verificare se le variabili x_{-i}, y_{-j}, k_{-f}, r_{-u} forniscono informazioni sufficienti a determinare in modo univoco le variabili latenti e gli errori nelle equazioni e nelle variabili del modello Lisrel ovviando al problema visto nel paragrafo 6.2.

Siano dati, a questo scopo, i sistemi lineari:

$$(6.20) \quad \begin{bmatrix} T \\ \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1A} & N_{1B} \\ N_{1C} & N_{1D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ \\ Y \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{1B} \\ Q_{1C} & Q_{1D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K \\ \\ R \end{bmatrix}$$

$$
(21)\quad \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{2A} & N_{2B} \\ N_{2C} & N_{2D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} Q_{2A} & Q_{2B} \\ Q_{2C} & Q_{2D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K \\ R \end{bmatrix}
$$

...n N_{1A}, N_{1B}, N_{1C}, N_{1D}, Q_{1A}, Q_{1B}, Q_{1C}, Q_{1D}, N_{2A}, N_{2B}, N_{2C}, N_{2D}, Q_{2A}, Q_{2B}, ...$_{2C}$, Q_{2D} matrici rispettivamente di dimensioni (q,m) ...,r),(p,m),(p,r),(q,q),(q,p),(p,q),(p,p),(m,m),(m,r),(r,m), ...,r),(m,q),(m,p),(r,q),(r,p).

...n forma compatta, ponendo:

$$
N_1 = \begin{bmatrix} N_{1A} & N_{1B} \\ N_{1C} & N_{1D} \end{bmatrix}
$$

$$
Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{1B} \\ Q_{1C} & Q_{1D} \end{bmatrix}
$$

$$
N_2 = \begin{bmatrix} N_{2A} & N_{2B} \\ N_{2C} & N_{2D} \end{bmatrix}
$$

$$
Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{2A} & Q_{2B} \\ Q_{2C} & Q_{2D} \end{bmatrix}
$$

istemi (6.20) e (6.21) divengono:

$$(6.22) \qquad F = N J + Q B$$

$$(6.23) \qquad H = N_2 J + Q_2 B$$

i ricavano dapprima alcune eguaglianze:

er la struttura del modello Lisrel (1.21) e(1.26):

$$(6.24) \qquad F F' = S_F \quad ; \quad FH' = 0 \quad ; \quad HH' = S_H$$

e percio'per la (6.19) e (6.20):

$$(6.25) \qquad S_F = N_1 S_J N_1' + Q_1 Q_1'$$

$$(6.26) \qquad FH' = 0 = N_1 S_J N_2' + Q_1 Q_2'$$

$$(6.27) \qquad S_H = S_J - V S_F V' = N_2 S N_2' + Q_2 Q_2'$$

Ancora per il modello Lisrel (1.21) e (1.26), e per la (6.22) :

$$(6.28) \qquad J = VF + H = V[N_1 J + Q_1 B] + N_2 J + Q_2 B$$

e quindi per la (6.19)

$$(6.29) \qquad S_J = V N_1 S_J + N_2 S_J = (V N_1 + N_2) S_J$$

Postmoltiplicando entrambi i membri della (6.29) per S_J^{-1}

si ottiene:

$$(6.30) \qquad I_{m+r} = V N_1 + N_2$$

Infine per la (6.19) e per la (6.28):

$$(6.31) \qquad JB' = 0 = VQ_1 + Q_2$$

Si possono ora ricavare i valori della matrice dei coefficienti della (6.20) e (6.21). Si ottiene da (6.30) e (6.31) :

$$(6.32) \qquad N_2 = I - VN_1 \; ;$$

$$(6.33) \qquad Q_2 = - VQ_1 \; ;$$

da (6.26) e da (6.32) :

$$(6.34) \qquad N_1 S_J - N_1 S_J N_1' V' = Q_1 Q_1' V';$$

da (6.25):

$$(6.35) \qquad Q_1 Q_1' = S_F - N_1 S_J N_1' \; ;$$

da (6.34) e (6.35):

$$(6.36) \qquad N_1 S_J - N_1 S_J N_1' V' = S_F V' - N_1 S_J N_1' V' \; ;$$

da (6.36):

$$(6.37) \qquad N_1 = S_F V' S_J^{-1} \; ;$$

da (6.32):

$$(6.38) \qquad N_2 = I - V S_F V' S_J^{-1} = S_H S_J^{-1} \; ;$$

da (6.35):

$$(6.39) \qquad Q_1 Q_1' = S_F - S_F V' S_J^{-1} V S_F \; ;$$

Tenendo conto della matrice di varianze-covarianze del modello Lisrel e partizionando in modo opportuno la matrice inversa S_J^{-1}

$$(6.40) \qquad S_J^{-1} = \begin{bmatrix} S_{JA} \\ \\ S_{JB} \end{bmatrix}$$

con S_{JA} matrice di dimensioni $(m,m+r)$, S_{JB} di dimensioni $(r,m+r)$: e' possibile esprimere le variabili latenti e gli

ori nelle equazioni e gli errori nelle variabili del
ello Lisrel come combinazioni lineari delle variabili
servate e addizionali nel seguente modo :

$$
(6.41)\qquad \begin{bmatrix} T \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_T\, P'(I-A')\, L_X' S_{JA} & ; & S_T\, L_Y' S_{JB} \\ S_G\, (I-A')^{-1} L_X' S_{JB} & ; & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{1B} \\ Q_{1C} & Q_{1D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K \\ R \end{bmatrix}
$$

$$
(6.42)\qquad \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_E S_{JA} & 0 \\ 0 & S_D S_{JB} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P\, Q_{1A} + L\, (I-A)^{-1} Q_{1C} & ; & L_X (I-A)^{-1} P\, Q_{1B} + L\, (I-A)^{-1} Q_{1D} \; ; \\ L_Y Q_{1A} & ; & L_Y Q_{1D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K \\ R \end{bmatrix}
$$

Ponendo :

$$
(6.43)\qquad V_A' = \begin{bmatrix} P'(I-A')^{-1} L_X' & ; & L_Y' \end{bmatrix}
$$

$$
(6.44)\qquad V_B' = \begin{bmatrix} (I-A')\, L_X' & ; & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
(6.45)\qquad Q_{1T} = \begin{bmatrix} Q_{1A} & ; & Q_{1B} \end{bmatrix}
$$

$$(6.46) \quad Q_{1G} = \begin{bmatrix} Q_{1C} & ; & Q_{1D} \end{bmatrix}$$

ha in forma piu' compatta per la (6.41):

$$(6.47) \quad T = S_T \; V'_A \; S_J^{-1} \; J + Q_{1T} \; B$$

$$(6.48) \quad G = S_G \; V'_B \; S_J^{-1} \; J + Q_{1G} \; B$$

ancora per la (6.41) e (6.42):

$$(6.49) \quad F = S_F \; V' \; S_J^{-1} \; J + Q_1 \; B$$

$$(6.50) \quad H = S_H \; S_J^{-1} \; J \; V \; Q_1 \; B$$

Si puo' verificare che l' introduzione delle variabili addizionali k_{-f} e r_{-u} permette di ovviare al problema posto nel paragrafo 6.2 .

Si verifica infatti che le matrici di correlazione parziale di variabili latenti ed errori nelle equazioni definiti in (6.41) date le variabili osservate sono nulle, come del resto le matrici di correlazione parziale degli errori nelle variabili definiti in (6.42).Tutte le informazioni utili per individuare la struttura delle varianze covarianze delle variabili latenti del modello Lisrel sono tratte dalle variabili osservate com'e' ragionevole presumere avvenga.

PERMANENZA DELL'INDETERMINATEZZA

ntroduzione delle variabili aggiuntive non permette unque di risolvere il problema dell' indeterminatezza.

considerino gli spazi $V^{\perp}_N$ e V_J che per la (6.1) hanno imensioni n-1 e m+r.

e n-1 e' maggiore di m+r esiste il complemento ortogonale $V^{\perp}_J$ di V_J rispetto a $V^{\perp}_N$

$$V^{\perp}_N = V_J \oplus V^{\perp}_J \tag{6.51}$$

Naturalmente

$$\dim V^{\perp}_J = n-1-m-r \tag{6.52}$$

Si e' visto che le p+q variabili aggiuntive B sono incorrelate con le variabili osservate J e percio' appartengono all'insieme $V^{\perp}_J$.

Se quindi n-1-m-r e' maggiore di p+q, o,in altre parole:

$$n-1-m-r-p-q > 0 \tag{6.53}$$

esiste il complemento allo spazio V_B , $V^{\perp}_B$

$$V^{\perp}_J = V_B \oplus V^{\perp}_B \tag{6.54}$$

e percio', dato lo spazio $V^{\perp}_J$, vi sono infiniti modi per definire lo spazio V_B e quindi la matrice delle variabili aggiuntive B .

Di conseguenza sono infinite le matrici soluzione T,G,E,D dei sistemi (6.41),(6.42) .

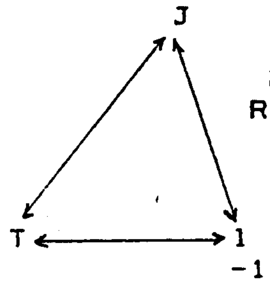
L'introduzione delle variabili addizionali fa si' che le variabili osservate x_{-i} e y_{-j} forniscano tutte le informazioni necessarie ad individuare le matrici di varianze covarianze delle variabii latenti e degli errori del modello.Tutta

come si era gia' visto sotto una altra ottica nel capi
o 4^, si verifica che vi sono infinite soluzioni carat
izzate da identiche matrici di varianze covarianze
S_T, S_G, S_E, S_D.

6. 1^ TEOREMA INCONSISTENTE SUL PIANO LOGICO SULLA CORRELAZIONE TRA VARIABILI LATENTI, OSSERVATE, ADDIZIONALI

Sulla scia delle argomentazioni di Schonemann e Steiger (1978, pp. 287-290) inerenti il modello fattoriale con fattori comuni ortogonali si dimostra che le variabili latenti e gli errori del modello Lisrel sono sempre costruiti in modo tale da prevedere perfettamente ,nel senso della regressione multipla, criteri interamente incorrelati con le variabili osservate e essere invece completamente incorrelati con altri criteri perfettamente prevedibili dalle variabili osservate.
Poiche' tutte le informazioni inerenti la struttura delle varianze - covarianze delle variabili latenti e degli errori sono ricavate dalle variabili osservate x_i e y_j , tali proprieta' sono inconsistenti sul piano logico.

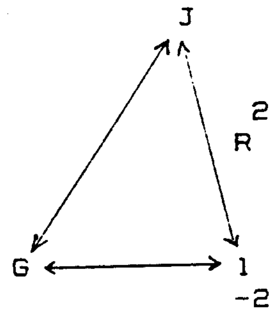
a)



$$R^2_{1_{-1} J} = 1$$

$$R^2_{1_{-1} T} = 0$$

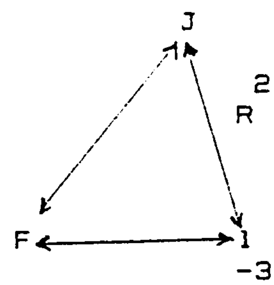
b)



$$R^2_{1_{-2} J} = 1$$

$$R^2_{1_{-2} G} = 0$$

c)



$$R^2_{1_{-3} J} = 1$$

$$R^2_{1_{-3} F} = 0$$

a) Se $n-1 > m+r+q$ esistono criteri 1_{-1} che sono completamente incorrelati con le variabili latenti t_{-h} ma contemporaneamente perfettamente prevedibili ,nel senso della regresione multipla, dalle variabili osservate .

b) Se $n-1 > m+r+p$ esistono criteri 1_{-2} completamente imprevedibili dalle variabili latenti g_{-w} ma contemporaneamente perfettamente prevedibili ,nel senso

...lla regressione multipla, dalle variabili osservate .

Se $n-1 > m+r+p+q$ e $m+r > p+q$ esistono criteri 1_{-3} ...ompletamente prevedibili dalle variabili latenti t_{-h} e dagli ...rrori g_{-w} presi congiuntamente (f_{-s}) ma perfettamente ...prevedibili, nel senso della regressione multipla, dalle ...variabili osservate.

Se invece $m+r=p+q$ il teorena non vale.

Si chiarisce ora il significato del teorema 1^ .

I criteri 1_{1} (1_{-2}) sono completamente imprevedibili dalle variabili latenti t_{-h} (errori nelle equazioni g_{-w}) e perfettamente prevedibili dalle variabili osservate x_{-i} e y_{-j} anche se esse spiegano, dopo l'introduzione delle variabili addizionali k_{-f} ed r_{-u} tutta la variabilita' delle variabili latenti t_{-h} (errori nelle equazioni g_{-w}).

Il che non e' ragionevole .

Il teorema vale anche per variabili latenti ed errori nelle ...equazioni prese congiuntamente (f_{-s}) solo qualora la ...numerosita' delle variabil latenti ed errori nelle equazioni ...e' inferiore al numero delle variabil osservate

Dimostrazione

...)Dalla (6.47)

$$(6.55) \qquad T = S_{T} V'_{A} S_{J}^{-1} J + Q_{1T} B$$

...si ricava che lo spazio V_{T} puo' essere decomposto nel ...seguente modo:

$$(6.56) \qquad V_{T} = V_{J_{1}} \oplus V_{B_{1}}$$

Con V_{J_1} spazio generato dalle righe di $J_1 = S_T V'_A S_J^{-1} J$

e V_{B_1} spazio generato dalle righe di $Q_{1T} B$.

Essendo $Q_{1T} B$ combinazione lineare delle righe di B si ha:

(6.57) $V_T = V_{J_1} \oplus V_{B_1} \subset V_{J_1} \oplus V_B$

e per l'ortogonalita' delle matrici J e B e quindi degli spazi V_{J_1} e V_{B_1} :

(6.58) $V_T = V_{J_1} \oplus V_{B_1} = V_{J_1 \oplus B_1} \subset V_{J_1} \oplus V_B$

Ricordando poi la

(6.51) $V^{\perp}_N = V_J \oplus V^{\perp}_J$

e la

(6.54) $V^{\perp}_J = V_B \oplus V^{\perp}_B$

si ottiene :

(6.59) $V^{\perp}_N = V_J \oplus V_B \oplus V^{\perp}_B$

ed essendo J combinazione lineare delle righe di J

(6.60) $V_J = V_{J_1} \oplus V^{\perp}_{J_1}$

si ha infine :

(6.61) $V^{\perp}_N = V_{J_1} \oplus V^{\perp}_{J_1} \oplus V_B \oplus V^{\perp}_B$

Si consideri ora un criterio $l_{-1} \in V^{\perp}_{J_1}$ normalizzato:

Per l'ortogonalita'dello spazio $V^{\perp}_{J_1}$ con gli spazi V_B e V_{J_1}

$$(6.62)\qquad \underline{1}_1 \perp V_B \; ; \; \underline{1}_1 \perp V_{J_1}$$

dato che anche V_B e' ortogonale a V_{J_1}

$$(6.63)\qquad \underline{1}_1 \perp (V_B \oplus V_{J_1})$$

A maggior ragione data la (6.58) si ha:

$$(6.64)\qquad \underline{1}_1 \perp V_T = V_{B_1} \oplus V_{J_1}$$

Il coefficiente di correlazione multipla di $\underline{1}_1$ con le variabili $\underline{t}_1, \underline{t}_2 \ldots \underline{t}_q$ $R^2_{\underline{1}_1 T}$ definite nello spazio V_T e' esprimibile con l'ausilio del proiettore ortogonale P_T nello spazio V_T (Takeuchi 1982, pp. 28-34).

$$(6.65)\qquad R^2_{\underline{1}_1 T} = \underline{1}_1 P_T \underline{1}_1'$$

Per le proprieta' dei proiettori (Takeuchi 1982 ,p.28)

$$(6.66)\qquad \underline{1}_1 \perp V_T \quad \text{se e solo se :} \quad \underline{1}_1 P_T = 0$$

e percio' data la (6.65) si ha in (6.66):

$$(6.67)\qquad R^2_{\underline{1}_1 T} = 0$$

Ancora per le proprieta' dei proiettori ortogonali :

$$(6.68)\qquad \underline{1}_1 \in V^{\perp}_{J_1} \quad \text{se e solo se :} \quad \underline{1}_1 P^{\perp}_{J_1} = P^{\perp}_{J_1}$$

e:

$$(6.69) \qquad P\perp_{J_1} = P\perp^2_{J_1} = P\perp_{J_1}$$

Perciò' il coefficiente di correlazione multipla di 1_{-1} con un insieme di variabili appartenenti allo spazio $V\perp_{J_1}$ e' uguale ad uno:

$$(6.70) \qquad R^2_{1_{-1}\perp J_1} = \frac{1}{n} 1_{-1} P\perp_{J_1} P\perp'_{J_1} 1'_{-1} = 1$$

Per la (6.60) $V\perp_{J_1} \subset V_J$

e, quindi, infine:

$$(6.71) \qquad R^2_{1_{-1}\perp J_1} = 1 = R^2_{1_{-1} J}$$

come volevasi dimostrare.

b) Si dimostra secondo un procedimento identico a quello visto in precedenza che un criterio $1_{-2} \in V\perp_{J_2}$ normalizzato e' caratterizzato da coefficiente di correlazione multipla nullo con gli errori nelle variabili $g_{-1}, g_{-2}, \dots g_{-p}$

$$(6.72) \qquad R^2_{1_{-2} G} = 0$$

e unitario con le variabili osservate :

$$(6.73) \qquad R^2_{1_{-1} J} = 1$$

c) Qualora la numerosita' delle variabili osservate m+r e' superiore alla numerosita' delle variabili latenti e degli errori nelle equazioni si dimostra secondo un procedimento dentico a quello visto in precedenza che un criterio e $V^{\perp}_{J_3}$ normalizzato e' caratterizzato da coefficiente di cor elazione multipla nullo con le variabili t_{-1}, $t_{-2} \dots t_{-q}$ e gli errori nelle equazioni $g_{-1}, g_{-2}, \dots, g_{-p}$ considerati congiuntamente

$$(6.74) \qquad R^2_{1\,F_{-3}} = 0$$

e unitario con le variabili osservate :

$$(6.75) \qquad R^2_{1\,J_{-3}} = 1$$

Qualora invece la numerosita' delle variabili osservate e' uguale a quella delle variabili latenti ed errori nelle equazioni, le matrici $S_F\, V'\, S_J^{-1}\, J$ e $Q_1\, B$ nella formula

$$(6.49) \qquad F = S_F\, V'\, S_J^{-1}\, J + Q_1\, B$$

hanno dimensioni $(m+r,n)$ come le matrici J e B

Gli spazi V_{J_3} e V_{B_3} hanno quindi dimensione :

$$(6.76) \qquad \dim V_{J_3} = \dim V_{B_3} = m + r = p+q$$

e quindi gli spazi ad essi ortogonali $V^{\perp}_{J_3}$ e $V^{\perp}_{B_3}$

$$(6.77) \qquad \dim V^{\perp}_{J_3} = \dim V^{\perp}_{B_3} = m+r-p-q$$

Risulta chiaro dalla (6.77) che in questo caso in cui $m+r=p+q$ gli spazi $V^{\perp}_{J_3}$ e $V^{\perp}_{B_3}$ non esistono in quanto V_{J_3} e V_{B_3} sono isomorfi agli spazi V_J e V_B .Il teorema 1c) non vale poiche' impossibile definire un criterio $l_{-3} \perp V_J$ mentre valgono

mpre anche con $m+r=p+q$ i teoremi 1a) e 1c) poiche'

$r > q, m+r > p$.

.7. 2^ TEOREMA INCONSISTENTE SUL PIANO LOGICO SULLA CORRELAZIONE TRA VARIABILI LATENTI, OSSERVATE, ADDIZIONALI

a)

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ T \arrow[rr, leftrightarrow] & & l_{-4} \end{tikzcd} \qquad R^2_{l_{-4} J} = 0 \qquad R^2_{l_{-4} T} > 0$$

b)

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ G \arrow[rr, leftrightarrow] & & l_{-4} \end{tikzcd} \qquad R^2_{l_{-4} J} = 0 \qquad R^2_{l_{-4} G} > 0$$

c)

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ F \arrow[rr, leftrightarrow] & & l_{-4} \end{tikzcd} \qquad R^2_{l_{-4} J} = 0 \qquad R^2_{l_{-4} F} > 0$$

a) Qualora i vettori delle variabili latenti t_{-h} siano linearmente indipendenti fra loro, esiste un criterio l_{-4} che e' prevedibile nel senso della regressione multipla dalle variabili latenti $\underline{t}_h$ e completamente incorrelato con le variabili osservate J.

Cio' avviene comunque sia costruito il criterio $\underline{l}_4$.

b) Qualora i vettori degli errori nelle variabili $\underline{g}_w$ siano linearmente indipendenti fra loro, esiste un criterio $\underline{l}_4$ che e' prevedibile nel senso della regressione multipla dalle variabili latenti $\underline{g}_w$ e completamente incorrelato con le variabili osservate J.

Cio' avviene comunque sia costruito il criterio $\underline{l}_4$.

c) Qualora i vettori $\underline{f}_s$ delle variabili latenti $\underline{t}_h$ e degli errori nelle equazioni $\underline{g}_w$ presi congiuntamente sono linearmente indipendenti esiste un criterio $\underline{l}_4$ che e' prevedibile nel senso di una regressione multipla da errori nelle equazioni e variabili latenti presi congiuntamente e completamente imprevedibile dalle variabili osservate J. Cio' avviene comunque sia costruito il criterio $\underline{l}_4$.

Il teorema 2^ completa il significato del teorema 1^.
Se i vettori delle variabili latenti e degli errori nelle equazioni sono tutti linearmente indipendenti ,puo' avvenire che criteri completamente incorrelati con le variabili osservate(teorema 2^) sono prevedibili dalle variabili latenti e dagli errori nelle equazioni mentre non lo sono criteri correlati in modo perfetto con le variabili osservate(teorema 1^).
Cio' non e' ragionevole in quanto le informazioni inerenti la variabilita' di variabili latenti ed errori sono tratte dalle variabili osservate.

Dimostrazione

Si consideri un criterio l_{-4} appartenente o allo spazio V_K delle variabili additive K, o allo spazio V_R delle variabili additive R, o allo spazio $V_B = V_K \oplus V_R$ somma diretta degli spazi V_K e V_R.

Naturalmente essendo lo spazio V_B ortogonale allo spazio delle variabili osservate V_J:

$$(6.78) \qquad R^2_{l_{-4} J} = 0$$

Si utilizza poi il criterio l_{-4} come primo vettore di una base per lo spazio V_K (V_R se l_{-4} e' una variabile r_{-u}) mentre i rimanenti q - 1 vettori k_{-f} (f= 1, 2 ..., q) e i p vettori r_{-u} =(u=1,2,..,p) sono vettori qualsiasi non nulli standardizzati incorrelati tra loro e con i vettori delle variabili osservate :

$$(6.79) \qquad l_{-4} J' = 0 \; ; \quad k_{-f} k'_{-g} = 0 \; ; \; k_{-f} r'_{-u} = 0 \; ;$$

$$r_{-u} r'_{-v} = 0 \; ; \; k_{-f} l'_{-4} = 0 \; ;$$

$$r_{-u} l'_{-4} = 0 \; ; \; r_{-u} r'_{-u} = 0 \; ;$$

$$(g \neq f \; ; \; g,f = 2,\ldots q)$$

$$(u \neq v \; ; \; u,v = 1,2..p)$$

Si ha percio':

$$(6.80)\qquad B = \begin{bmatrix} \underline{1}_4 \\ \underline{k}_2 \\ . \\ \underline{k}_f \\ . \\ \underline{k}_q \\ \underline{r}_1 \\ . \\ \underline{r}_u \\ . \\ \underline{r}_p \end{bmatrix}$$

$$(6.81)\qquad \frac{1}{n} B \, \underline{1}_4' = \underline{b}$$

con $\underline{b}$ vettore di dimensioni (p+q,1) con il primo elemento uguale a uno e gli altri uguali a 0.

Si consideri ora:

$$(6.82)\qquad R^2_{\underline{1}_4 T} = \frac{1}{n} \underline{1}_4 \, P_T \, \underline{1}_4'$$

ove P_T e' la proiezione ortogonale del vettore $\underline{1}_4$ nello spazio V_T.

Per le proprieta' dei proiettori (Takeuchi, 1982, pp. 27-34).

$$(6.83)\qquad P_T = T' \, (T \, T')^{-1} \, T = T' \, S_T^{-1} \, T$$

Per la (6.55) si ha in (6.82):

$$(6.84)\qquad R^2_{\underline{1}_4 T} = \frac{1}{n} \underline{1}_4 \, (B'Q'_{1T} + J'S_J^{-1} \, V_A \, S_T) \, S_T^{-1} \, (Q_{1T} \, B + S_T V_A \, S_J^{-1} \, J)$$

Per l'incorrelazione di $\underline{1}_4$ e J :

$$(6.85) \qquad R^2_{1T\cdot 4} = \frac{1}{n}\, \underline{1}_4\, B' Q'_{1T}\, S_T^{-1}\, Q_{1T}\, B\, \underline{1}'_4$$

Ancora dalla (6.55) si ha :

$$(6.86) \qquad Q_{1T} = T - S_T\, V'\, S_J^{-1}\, J$$

e per la (6.81):

$$(6.87) \qquad R^2_{1T-4} = \frac{1}{n}\, \underline{b}\, Q'_{1T}\, S_T^{-1}\, Q_{1T}\, \underline{b}'$$

Il prodotto tra il vettore $\underline{b}$ di dimensioni (1,p+q) con elementi tutti nulli eccetto il primo elemento pari ad uno e la matrice Q_{1T} da' come risultato un vettore di dimensioni (1,q) identico alla prima riga di Q_{1T} :

$$(6.88) \qquad R^2_{1T-4} = \frac{1}{n}\, \underline{q}_{1T}\, S_T^{-1}\, \underline{q}'_{1T}$$

Si consideri la matrice S_T^{-1} .Se i vettori riga delle variabili latenti $\underline{t}_h$ sono tutti linearmente indipendenti tale matrice esiste ed e' di rango q.

Percio':

$$(6.89) \qquad rg(S_T^{-1}) = rg(S_T^{-½}\; S_T^{-½}) = rg (S_T^{-½})$$

e percio' la matrice $S_T^{-½}$ ha rango pieno.

Per un teorema riguardante le matrici grammiane (Basilewsky 1983, p. 137) la matrice simmetrica S_T^{-1} di dimensioni(q,q) e' positiva definita in quanto puo' essere fattorizzata come

$$S_T = S_T^{½}\; S_T^{-½} .$$

con $S_T^{-1/2}$ non singolare.

Quindi per le proprieta' delle matrici definite positive da (6.89) si ha:

$$(6.90) \qquad R^{2}_{\underset{-4}{1}\,T} = q_{-1T} \, S_T^{-1} \, q'_{-1T} > 0$$

come volevasi dimostrare.

b) Identica dimostrazione puo' essere fatta per gli errori nelle equazioni .

Si consideri ancora il criterio $\underset{-4}{1}$ appartenente allo spazio V_B ortogonale allo spazio delle variabili osservate V_J :

Si ha per ipotesi:

$$(6.78) \qquad R^{2}_{\underset{-4}{1}\,J} = 0$$

e con procedimento identico a quello visto per le variabili latenti si ottiene:

$$(6.91) \qquad R^{2}_{\underset{-4}{1}\,G} > 0$$

c) Identica dimostrazione puo' essere fatta per gli errori nelle equazioni e le variabili latenti prese congiuntamente.

Si consideri ancora il criterio $\underset{-4}{1}$ appartenente allo spazio V_B ortogonale allo spazio delle variabili osservate V_J :

Si ha per ipotesi:

$$(6.78) \qquad R^{2}_{\underset{-4}{1}\,J} = 0$$

e con procedimento identico a quello visto per le variabili latenti si ottiene:

$$R^{2}_{1_{-4}\;F} > 0 \tag{6.92}$$

6.8. 3^ TEOREMA INCONSISTENTE SUL PIANO LOGICO SULLA CORRELAZIONE TRA VARIABILI LATENTI, OSSERVATE,ADDIZIONALI

le variabili latenti e gli errori del modello Lisrel possono sempre essere costruiti in modo tale da prevedere perfettamente, nel senso della regressione multipla, anche criteri 1_{-5} totalmente incorrelati con le variabili osservate.

Questo teorema completa il quadro delle proprieta' logicamente inconsistenti associate alle soluzioni del Lisrel mostrando che quanto e' stato dimostrato per variabili latenti ed errori nelle equazioni vale ugualmente per gli errori nelle variabili.

le informazioni tratte dalle variabili osservate forniscono tutte le informazioni necessarie ad individuare la variabilita' di variabili latenti ,errori nelle equazioni , errori nelle variabili.

Nonostante cio', un criterio totalmente incorrelato con le variabili osservate e' perfettamente prevedibile da variabili latenti ed errori . Il che non e' ragionevole.

$$
\begin{tikzcd}
 & & J \arrow[dd, dashed, leftrightarrow, "R^2_{1_{-5}J} = 0"] \\
 & & \\
T \oplus G \oplus D \oplus E \arrow[uurr, leftrightarrow] \arrow[rr, leftrightarrow, "R^2_{1_{-5}(T \oplus G \oplus E \oplus D)} > 0"'] & & 1_{-5}
\end{tikzcd}
$$

Dimostrazione

Si dimostra innanzitutto che lo spazio generato dalle variabili osservate e dalle variabili additive e' isomorfo allo spazio generato dalle variabili latenti e dagli errori

$$(6.93) \qquad V_T \oplus V_G \oplus V_E \oplus V_D = V_X \oplus V_Y \oplus V_K \oplus V_R$$

Dalla (6.49) e (6.50) si ottiene

$$
\begin{bmatrix} H \\ \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & ; & S_F V' S_J^{-1} \\ \\ - VQ_1 & ; & S_H S_J^{-1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} B \\ \\ J \end{bmatrix}
$$

Perche' lo spazio degli errori e delle variabili latenti sia isomorfo allo spazio delle variabili osservate e additive occorre che la matrice dei coefficienti ottenuta attraverso la (6.49) e la (6.50) sia invertibile.

Per le proprieta' inerenti l'inversione di matrici a blocchi (Searle 1982, p.260)la matrice inversa della matrice dei coefficienti ottenuta attraverso la (6.49) e la (6.50) esiste e assume la seguente configurazione:

$$(6.94)\quad \begin{bmatrix} Q_1^{-1} - Q_1^{-1} S_F V' S_J^{-1} V & ; & -Q_1^{-1} S_F V' S_J^{-1} \\ V & ; & I \end{bmatrix}$$

E' cosi' dimostrato che lo spazio generato dalle righe di J e B e' isomorfo allo spazio generato dalle righe di F e H.

Dato che :

$$J = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} K \\ R \end{bmatrix} \; ;$$

$$F = \begin{bmatrix} T \\ K \end{bmatrix} \; ; \; H = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}$$

dalla (6.93) discende che anche lo spazio generato dalle righe di X, Y, K, R e'isomorfo allo spazio generato dalle righe di T , G , E, D.

Cio'premesso sia dato un criterio $l_{-5} \in V^{\perp}_N$.

Poiche', per (6.51)

$$V^{\perp}_N = V_J + V^{\perp}_J$$

tale criterio puo' essere unicamente scritto come

$$(6.95)\quad l_{-5} = l_{-5J} + l_{-5U} \qquad \text{con } l_{-5J} \in V_J \;;\; l_{-5U} \in V^{\perp}_J$$

Se $l_{-5U} = 0$ si ha :

$$(6.96)\quad R^2_{l_{-5J}\,J} = 1 = R^2_{l_{-5J}\,(X \oplus Y)} = R^2_{l_{-5J}\,(X \oplus Y \oplus K \oplus R)}$$

e per l'isomorfismo (6.93) :

$$(6.97)\quad R^2_{l_{-5J}\,(X \oplus Y \oplus K \oplus R)} = R^2_{l_{-5J}\,(T \oplus G \oplus E \oplus D)} = 1$$

Se invece $l_{-5U} \neq 0$ si costruisce il vettore

$$(6.98) \qquad l^*_{-5U} = l_{-5U} \sqrt{n / l_{-5U} \, l'_{-5U}}$$

tale che $(l^*_{-5U} \, l^{*\prime}_{-5U})/n = 1$

Come l_{-5U} anche $l^*_{-5U} \in V\perp_{J}$ e puo' essere usato come elemento

per costruire una base per V_B insieme ad altri q-1 vettori

k_{-f} e p vettori r_{-u} che soddisfano la

$$(6.79) \qquad l_{5U} \, J'_{-} = 0 \; ; \qquad k_{-f} \, k'_{-g} = 0 \; ; \; k_{-f} \, r'_{-u} = 0 \; ;$$

$$r_{-u} \, r'_{-v} = 0 \; ; \; k_{-f-4} \, l' = 0 \; ;$$

$$r_{-u} \, l'_{-4} = 0 \; ; \; r_{-u} \, r'_{-u} = 0 \; ;$$

$$(g \neq f \; ; \quad g,f = 2,\ldots q)$$

$$(u \neq v \; ; \quad u,v = 1,2..p)$$

Dal fatto che lo spazio $V_J = V_{X \oplus Y}$ contiene l_{-5J} e lo spazio

V_B contiene l_{-5U} discende il fatto che :

$$(6.99) \qquad l_{-5} \in V_{J \oplus B} = V_X \oplus V_Y \oplus V_K \oplus V_R$$

e :

$$(6.100) \qquad R^2_{l_{-5J}\,(X \oplus Y \oplus K \oplus R)} = 1$$

e per l'isomorfismo (6.93):

$$(6.101) \qquad R^2_{l_{-5J}\,(X \oplus Y \oplus K \oplus R)} = R^2_{l_{-5J}\,(T \oplus G \oplus E \oplus D)} = 1$$

.9. I TRE TEOREMI PER I SOTTOMODELLI E GLI ALTRI MODELLI

Si sono dimostrati i tre teoremi inconsistenti sul piano logico per il modello Lisrel generale.

Si osservi ora cosa accade per i diversi sottomodelli di Lisrel e gli altri modelli visti nei capitolo precedenti. Si e' visto che nel caso generale quando la numerosita' delle variabili osservate (m+r) e' uguale alla numerosita' delle variabili latenti (p+q), non vale il 3 comma del 1^ teorema, relativo all'esistenza di criteri perfettamente correlati con variabili osservate e incorrelati con variabili latenti. Si e' visto anche che ai fini delle dimostrazioni dei teoremi ininfluente e' la struttura delle matrici dei parametri in quanto determinanti ai fini della dimostrazione risultano solo la numerosita' e la correlazione esistente tra variabili latenti e osservate.

Si puo' percio' dedurre che le differenze tra le dimostrazioni dei due teoremi per il modello generale Lisrel, sottomodelli del Lisrel e gli altri modelli descritti nei capitoli primo e secondo nascono dalla diversa numerosita' e dalla presenza o meno delle variabili latenti,degli errori nelle equazioni e degli errori nelle variabili.

Per tutti i modelli vale sempre il teorema 3^.Inoltre:

a) per il sottomodello M1, per l'analisi della varianza, per l'analisi fattoriale, per il modello di path analysis con variabili latenti valgono sempre i teoremi 1^ e 2^ limitatamente alle variabili latenti.

b) per il sottomodello M2, per il sottomodello Acovs, per l'analisi fattoriale di 2^ grado valgono sempre i modelli 1^ e 2^ per le variabili latenti e gli errori nelle equazioni.

Il teorema 1^ vale anche per le variabili latenti e gli errori nelle equazioni presi congiuntamente se e solo se $m > p + q$.

c) per il sottomodello M3, valgono il comma c del teorema 1^ se e solo se $m > p$ e il teorema 2^ limitatamente agli errori nelle equazioni .

d) Per il modello quasi simplex e il modello di misura cogeneriche valgono i teoremi 1^ e 2^ per gli errori nelle equazioni .Non vale il comma c del teorema 1^ poiche' $m = p$.

e) Per il sottomodello M4, valgono il teorema 1^, se e solo se $m > p$ $(r > q)$ e il teorema 2^ entrambi limitatamente alle variabili latenti.

f) per il modello Lisrel in versione originaria non vale il terzo comma del teorema 1 perche' m = p, r = q .Vale sempre i teoremi 2^ .

Sinteticamente:

	Teorema 1			Teorema 2			Teorema [illegible]
	VAR LATENTI	ERRORI NELLE EQUAZ.	VAR. LATENTI ERRORI NELLE EQUAZ.	VAR. LATENTI	ERRORI NELLE EQUAZ.	VAR. LATENTI ERRORI NELLE EQUAZ.	
MODELLI							
M1	sempre	-	-	sempre	-	-	sempre
M2	sempre	sempre	m>p+q	sempre	sempre	sempre	sempre
M3	-	m>p	-	-	sempre	-	sempre
M4	m>p;r>q	-	-	sempre	-	-	sempre
An. var. An. fattor. Path anal.	sempre	-	-	sempre	-	-	sempre
ACOVS An. fatt. 2° grado	sempre	sempre	m>p+q	sempre	sempre	sempre	sempre
Quasi simplex misure cogen.	-	mai	-	-	sempre	-	sempre
Lisrel originale	sempre	sempre	mai	sempre	sempre	sempre	sempre