=.=

Parte Prima

INDETERMINATEZZA DEL MODELLO LISREL E SUA VALIDITA' SUL PIANO LOGICO

=.=

Capitolo 1

IL MODELLO LISREL COME MODELLO DI EQUAZIONI STRUTTURALI

Il modello Lisrel, nelle sue numerose versioni (Jöreskog 1973, 1977, 1978, 1981, 1982; Jöreskog Sörbom 1976) e'stato innanzitutto presentato come un particolare modello di equazioni strutturali.

1.1. I MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI

"By structural equation models, I refer to stochastic models in which each equation represents a causal link rather than a mere empirical association. The models arise in non experimental situations and are characterized by simultaneity and / or errors in the variables. The errors in the variables may be due to measurement quantities are not the same as the relevant theorical quantities. Generally speaking the structural parametres do not coincide with coefficients of regressions among osservable variables, but the model does impose constraints in those regression coefficients. (Goldberger 1972,p. 979).

La definizione enunciata permette di delineare le caratteristiche principali di tali modelli:

- esistenza di nessi causali tra le variabili;
- simultaneita' delle equazioni legate da siffatti nessi;
- utilizzo di variabili non direttamente osservabili, dette variabili latenti i cui legami e le cui differenze di valore dalle variabili osservabili sono individuabili attraverso i cosiddetti modelli di misura;
- imposizione di vincoli sui parametri strutturali del modello in quanto tali parametri, mettendo in luce legami

causali e non associazioni empiriche tra variabili, non coincidono e non possono essere individuati semplicemente come coefficienti di regressione.

Il modello Lisrel e' un particolare modello di equazioni strutturali composto da una path analysis ad equazioni simultanee tra variabili latenti e due modelli di misura.

Per una migliore introduzione al modello Lisrel giova percio' innanzitutto presentare brevemente le caratteristiche piu' salienti dei modelli di misura e della path analysis.

Prima di farlo occorre pero' effettuare una precisazione utile per il prosieguo della trattazione.

Nella definizione di Goldberger si parla di modelli stocastici ma nella nostra trattazione si fara' riferimento a modelli di tipo descrittivo in cui i valori sono realizzazioni di variabili casuali. E' possibile infatti introdurre le considerazioni e le dimostrazioni inerenti l'identificabilita' e l'indeterminatezza del modello Lisrel anche in chiave descrittiva, con vantaggi in termini di interpretabilita' dei risultati.

Le conclusioni cosi' raggiunte rimangono valide per il caso stocastico.

1.2. MODELLI DI ERRORI DI MISURA

Una volta prescelti uno o piu' insiemi di variabili di cui si voglia studiare la dipendenza o l'interdipendenza in alcuni casi l'imprecisione degli strumenti di misura puo' portare ad errori nell'individuazione dei loro valori; in altri casi l'impossibilita' di effettuare misurazioni dirette sulle variabili prescelte puo' impedire addirittura di avere a disposizione dati oggettivamente certi. I modelli di misura traggono origine da questi due problemi e permettono di mettere in luce o il legame tra valori veri ed osservati di un medesimo insieme di variabili o la relazione tra valori di variabili osservate e valori di variabili non direttamente osservabili e di significato logico simile a quello delle variabili osservate prescelte.

Il modello di misura piu' elementare e' quello in cui esiste la seguente relazione tra variabili osservate e latenti:

$$X = T + E \tag{1.1}$$

dove :

$X = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \cdot \\ \underline{x}_i \\ \cdot \\ \underline{x}_m \end{bmatrix}$ e'la matrice di dimensioni (m, n) dei valori delle m variabili osservate su n unita'. L'i-esima riga riga $\underline{x}_i$ e' il vettore dei valori osservati del la i-esima variabile.

$T = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \\ \cdot \\ \underline{t}_i \\ \cdot \\ \underline{t}_m \end{bmatrix}$ e' la matrice di dimensioni(m,n) dei valori "veri" L'i-esima riga $\underline{t}_i$ e' il vettore dei valori "veri" dell'i-esima variabile latente.

$$E = \begin{bmatrix} e_{-1} \\ \cdot \\ e_{-i} \\ \cdot \\ e_{-m} \end{bmatrix}$$ e'la matrice di dimensioni (m, n) degli errori di misura.L' i-esima riga e_{-i} e' il vettore dei valori dell'i-esimo errore di misura.

Nel prosieguo della trattazione i vettori dei valori delle variabili osservate, delle variabili latenti, degli errori saranno definiti, per brevita', come vettori delle variabili osservate,vettori delle variabili latenti,vettori degli errori.

Si assume che x_{-i}, t_{-i}, e_{-i} sono variabili centrate, ossia variabili caratterizzate da media nulla.

Si ha percio' per le matrici X,T,E dato il vettore a n componenti

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.2) \qquad X\,1' = \underline{0}' \quad ; \qquad T\,\underline{1}' = \underline{0}' \quad ; \qquad E\,\underline{1}' = \underline{0}' \quad ;$$

Si ipotizza inoltre incorrelazione tra le variabili "vere" e gli errori di misura e incorrelazione tra gli errori di misura :

$$(1.3) \qquad TE' = 0$$

$$e_{-i}\,e'_{-j} = 0 \qquad (i \neq j; i, j = 1,2....m)$$

La matrice di varianze-covarianze e' quindi :

$$(1.4) \qquad S_X = \frac{1}{n} X\,X' = S_T + S_E$$

ove S_X e S_T sono rispettivamente la matrice di varianze-covarianze delle variabili osservate e latenti mentre S_E e'la matrice diagonale degli errori di misura.

Un altro possibile modello di misura che mette in luce il legame tra variabili osservate e latenti e' il seguente

$$X = AT + E \qquad (1.5)$$

ove:

A di dimensioni (m, p) e' la matrice dei coefficienti

T di dimensioni (p, n) e' la matrice delle variabili latenti

Sempre nell'ipotesi di incorrelazione tra errori di misura e variabili latenti la matrice di varianze-covarianze del modello e' :

$$S_X = A S_T A' + S_E \qquad (1.6)$$

1.3. PATH ANALYSIS

1.3.1. Definizione

La path analysis e' un modello che intende mettere in luce la intensita' dei contributi causali diretti esistenti tra le variabili in un sistema di equazioni lineari (Duncan 1966). Sviluppata dapprima da Wright (1934, 1954, 1960a, 1960b) e utilizzata successivamente nelle piu' svariate scienze umane [sociologia (Duncan 1966) economia (Gintis 1971) teoria del capitale umano (Griliches Mason 1972)] in termini analitici la path analysis e' basata su una serie di regressioni multiple caratterizzate dall'addizionale assunzione di relazioni causali fra variabili indipendenti e dipendenti. Supponendo, in generale, relazioni lineari additive e asimmetriche fra un insieme di variabili osservabili su una scala almeno intervallare "each dependent variable is regarded as determined by the variables preceding it in the path diagram and a residual variable defined as incorrelated with the other variables is postulated to account for the unexplained portion of the variance in the dependent variable" (Takeuchi, 1982, p. 121).

Per una migliore comprensione del significato della path analysis si mostra ora un esempio di path analysis fondato su regressioni multiple con variabili completamente esogene e variabili che appaiono sia come variabili dipendenti sia come variabili indipendenti.

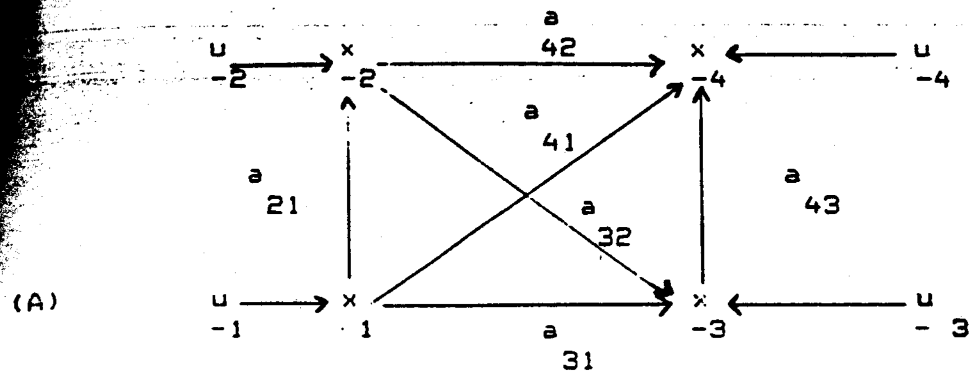
Siano :

$$X = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \underline{x}_4 \end{bmatrix}$$ la matrice di dimensioni (4,n) delle variabili vate centrate $\underline{x}_i$

$$U = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{bmatrix}$$ la matrice di dimensioni (4,n) delle variabili centrate esogene $\underline{u}_i$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$ matrice dei coefficienti strutturali o effetti diretti di una variabile $\underline{x}_i$ su un'altra $\underline{x}_j$ ($i \neq j$; $i,j=1,2,3,4$)

la path analysis puo' essere rappresentata dal seguente diagramma di flussi:



e dal seguente sistema lineare :

$$(1.7)\quad \begin{aligned} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= a_{21} x_1 + u_2 \\ x_3 &= a_{32} x_2 + a_{31} x_1 + u_3 \\ x_4 &= a_{43} x_3 + a_{42} x_2 + a_{41} x_1 + u_4 \end{aligned}$$

esprimibile in termini matriciali:

$$(1.8)\quad X = AX + U$$

In generale il principale risultato ottenibile attraverso la path analysis e' la scomposizione del coefficiente di correlazione lineare $r_{x_i x_j}$ fra le coppie di variabili x_i e x_j ($i \neq j; i,j = 1,2,3,4$) in veri e propri effetti diretti di una variabile sull'altra e effetti indiretti dovuti alla correlazione delle due variabili con altre variabili .

In termini analitici, calcolando il coefficiente di correlazione lineare tra le variabili x_i ($i=2,3,4$) e la variabile x_1 si ha :

$$r_{21} = a_{21}$$

(1.9) $$r_{31} = a_{31} + a_{32} r_{21}$$

$$r_{41} = a_{41} + a_{42} r_{21} + a_{43} r_{31}$$

e quindi:

(1.10) $$r_{41} = a_{41} + a_{42} a_{21} + a_{43} a_{31} + a_{43} a_{42} a_{21}$$

Osservando il diagramma di flussi (A) relativo alla path analysis (1.7) si puo' osservare, che il I^ addendo della (1.10) e' l'effetto diretto di x_{-1} su x_{-4} dovuto al sentiero di relazioni causali tra x_{-1} e x_{-4}, mentre gli altri tre addendi sono il prodotto degli effetti diretti fra le variabili che si incontrano lungo i diversi sentieri di relazioni causali congiungenti le variabili x_{-1} e x_{-4}.

1.3.2. Path analysis ad equazioni simultanee con variabili latenti

I sistemi di equazioni che costituiscono la path analysis assumono le forme di catene di regressioni recursive (come nel caso visto) o non recursive (in cui vi e' flusso bidirezionale fra le variabili predeterminate e quindi la matrice A non e' triangolare bassa), o modelli di equazione simultanee (Duncan Haller Porter 1968). In quest'ultimo caso, interessante per la presentazione del modello Lisrel, le variabili compaiono come variabili dipendenti o indipendenti e il modello puo' essere inteso quale modello di equazioni strutturali :

(1.11) $$X = AT$$

con:

matrice delle variabili dipendenti a dimensioni (m, n)

matrice delle variabili indipendenti latenti e dimensioni (p, n).

Utilizzata dapprima per il trattamento di variabili osservabili la path analysis e' stata ultimamente presa in considerazione anche per il trattamento di variabili latenti (Hauser Golderberger 1971, Werts Linn 1973, Jöreskog Guldberger 1973).

Jöreskog (1970) in particolare ha proposto il seguente modello di path analysis ad equazioni simultanee con variabili latenti che puo' utilmente introdurre al modello Lisrel:

(1.12) $$Z = AZ + UT$$

con:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ . \\ z_i \\ . \\ z_m \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni(m,n) delle variabili indipendenti latenti centrate;

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ . \\ t_i \\ . \\ t_r \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni (r,n) delle variabili dipendenti latenti centrate;

A matrici di dimensioni (m,m) degli effetti diretti di una variabile z_i su un'altra z_g ($i \neq g$; i,g=1,2,3,4);

U matrici di dimensioni (m,r) degli effetti diretti di una variabile z_i su un'altra t_j .

Le equazioni di misura che mettono in luce il legame tra le variabili latenti e le variabili osservabili sono le seguenti:

$$(1.13) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}$$

con:

X,Y matrici di dimensioni (m, n) e (r, n) di variabili osservate centrate;

$$E = \begin{bmatrix} e_{1} \\ . \\ e_{i} \\ . \\ e_{m} \end{bmatrix} ; \; D = \begin{bmatrix} d_{1} \\ . \\ d_{j} \\ . \\ d_{r} \end{bmatrix}$$

matrici di dimensioni (m,n) e (r,n) di errori di misura.

Valendo l'ipotesi di non singolarita' per la matrice A ed essendo definite le seguenti matrici:

$$J = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} (I-A)^{1} U \\ I_{r} \end{bmatrix}$$

il modello (1.12) e (1.13) puo'essere ripresentato nella seguente forma ridotta:

$$(1.14) \quad J = BT + H$$

Nell' ipotesi che gli errori di misura siano incorrelati fra loro e con le variabili latenti:

$$(1.15) \quad e_{i} e'_{g} = 0 \; (i \neq g; i,g=1,2,..m);$$

$$d_{j} d'_{k} = 0 \; (j \neq k; j,k=1,2,..r);$$

$$ED' = 0 ;$$

$$EZ' = 0 ; ET' = 0 ; DZ' = 0 ; DT' = 0$$

la matrice di varianze-covarianze del modello assume la seguente configurazione:

$$S_J = B\, S_T\, B' + S_H \tag{1.16}$$

con:

S_T matrice di varianze-covarianze delle variabili latenti

S_H matrice diagonale di varianze-covarianze degli errori nelle variabili

1.4. IL MODELLO LISREL

1.4.1. Introduzione

In numerosi articoli (1973, 1977, 1978, 1982) il modello Lisrel viene presentato da Jöreskog come modello di equazioni strutturali con variabili latenti composto da una path analysis ad equazioni simultanee e due modelli di equazioni di misura.

La path analysis mette in luce il seguente sistema di relazioni lineari strutturali

$$Z = AZ + PT + G \tag{1.17}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ z_w \\ \cdot \\ z_p \end{bmatrix} ; \quad T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ t_h \\ \cdot \\ t_q \end{bmatrix}$$

sono matrici di dimensioni (p,n) e (q,n) di variabili latenti centrate;

A di dimensioni (p, p) e' una matrice i cui elementi sono gli effetti causali diretti di ogni variabile z_w su ogni altra variabile z_l $(w \neq l, w, l = 1, 2 \ldots p)$.

di dimensioni (p,q) e' una matrice i cui elementi sono gli effetti causali diretti delle variabili $\underline{z}_w$ sulle variabili latenti $\underline{t}_h$.

$$G = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 \\ . \\ \underline{g}_w \\ . \\ \underline{g}_p \end{bmatrix}$$

e' una matrice di dimensioni (p, n) di variabili residue centrate dovute a disturbi causali ed errori nelle equazioni. Tali disturbi causali ed errori nelle equazioni hanno origine dagli effetti sulle variabili dipendenti di altre variabili predeterminate che non appaiono nel sistema.

Date :

$$X = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ . \\ \underline{x}_i \\ . \\ \underline{x}_m \end{bmatrix} ; \quad Y = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ . \\ \underline{y}_j \\ . \\ \underline{x}_r \end{bmatrix}$$

matrici di dimensioni (m,n) e (r,n) di variabili osservate centrate;

$$E = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ . \\ \underline{e}_i \\ . \\ \underline{e}_m \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ . \\ \underline{d}_j \\ . \\ \underline{d}_r \end{bmatrix}$$

matrici di dimensioni (m,n) e (r,n) di errori di misura

L_X , L_Y matrici di parametri di dimensioni (m,p) e (r,q) seguenti sistemi di equazioni di misura mettono in luce il legame tra le variabili osservate e latenti:

(1.18) $$X = L_X Z + E$$

(1.19) $$Y = L_Y T + D$$

E' affermato esplicitamente (Jöreskog 1977) che non necessariamente le variabili osservate $\underline{x}_i$ e $\underline{y}_j$ devono essere di numerosita' superiore alle variabili latenti z_w e t_h (m ≥ p; r ≥ q) e addirittura, in una prima versione del modello (Jöreskog 1973), in cui, come in (1.13) non comparivano nel modello di misura matrici di parametri, necessariamente la numerosita' delle variabili osservate e latenti era identica. Si assume inoltre che:

a) le variabili osservate x_i, y_j, le variabili latenti z_w e t_h gli errori nelle equazioni g_w, gli errori nelle variabili e_i e d_j sono variabili centrate.

b) La matrice (I-A) e' non singolare ed ha elementi tutti uguali ad uno sulla diagonale principale.

Il modello di path analysis puo' assumere ~~quindi~~ la forma ridotta:

$$Z = (I - A)^{-1} PT + (I - A)^{-1} G \tag{1.20}$$

Sostituendo i valori di Z ricavati dalla (1.20) nei due sistemi di equazioni di misura si ottiene il modello Lisrel in forma ridotta

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P \; ; \; L_X (I-A)^{-1} \\ L_Y \qquad ; \qquad 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

c) Le variabili latenti z_g e t_h non hanno scala definita.

Per fissare un'unita' di misura si puo' ricorrere a due metodi alternativi che (come si vedra' nelle applicazioni) danno luogo a risultati differenti pur se si adotta il medesimo procedimento risolutivo. E' possibile standardizzare le variabili latenti o uguagliare ad uno un parametro in ogni colonna delle matrici L_X e L_Y.

In questo modo le variabili latenti z_g e t_h hanno uguale unita' di misura delle variabili osservate x_i e y_j.

d) Le variabili latenti z_w e t_h sono incorrelate con gli errori nelle equazioni g_w e gli errori nelle variabili e_i e d_j:

(1.22) $ZT' = 0$; $ZG' = 0$; $TG' = 0$; $ZE' = 0$; $ZD' = 0$;

$TE' = 0$; $TD' = 0$;

gli errori nelle variabili e_i e d_j sono incorrelati con gli errori nelle equazioni g_w:

(1.23) $EG' = 0$; $DG' = 0$;

gli errori nelle variabili e_i sono incorrelati con gli errori nelle variabili d_j.

(1.24) $ED' = 0$

Definendo le seguenti matrici:

$$J = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} T \\ G \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P & ; & L_X (I-A)^{-1} \\ L_Y & ; & 0 \end{bmatrix};$$

la matrice di varianze-covarianze del modello assume la seguente configurazione

(1.25) $S_J = V S_F V' + S_H$

on:

$$S_F = \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_G \end{bmatrix} \qquad S_H = \begin{bmatrix} S_E & 0 \\ 0 & S_D \end{bmatrix};$$

matrici di varianze covarianze delle variabili latenti t_h, degli errori nelle equazioni g_u e degli errori nelle variabili e_i e d_j.