Capitolo 4

INDETERMINATEZZA DEL MODELLO LISREL: APPROCCIO ANALITICO

4.1. INTRODUZIONE

Nell'ambito degli studi inerenti l'analisi fattoriale (Schönemann Steiger 1978, Takeuchi 1982, Schönemann Haagen 1986) e'stato messo in luce che, anche qualora un modello di analisi fattoriale sia identificabile, le sue soluzioni non sono uniche a causa del cosiddetto problema dell'"indeterminatezza dei fattori".

Si e' ricordato, nel capitolo precedente, che Jöreskog ha affrontato il problema della non identificabilita' proponendo di porre vincoli in modo opportuno al modello, secondo criteri puramente empirici.

Nessun autore ha pero' mai trattato finora il problema della indeterminatezza delle variabili latenti del modello.

Nel prosieguo del lavoro si affronta questo tema sotto diverse ottiche.

In questo capitolo si illustrano sotto il profilo analitico le ragioni per cui l'identificabilita' nei parametri non garantisce soluzioni uniche per il modello Lisrel.

Si individuano dapprima quali siano i requisiti per l'esistenza delle soluzioni del modello Lisrel.

Successivamente si individuano dei requisiti necessari e sufficienti perche' siano soddisfatte tali requisiti di esistenza delle soluzioni del modello.

Al termine di questo procedimento, che trae spunto dai teoremi proposti da Guttmann(1955) a riguardo delle luzioni di un modello fattoriale con fattori non togonali, si traggono conclusioni sulle ragioni analitiche ell' indeterminatezza.

Si costruisce quindi (Capitolo 5^) una misura dell'indeterminatezza delle variabili latenti del modello individuandone anche relazioni con gli autovalori della matrice di varianze-covarianze delle soluzioni.

Quindi (Capitolo 6^) si ripresenta il problema della non unicita' delle soluzioni con l'ausilio di strumenti di algebra lineare dimostrando che l'indeterminatezza delle soluzioni del modello Lisrel e dei modelli ad esso collegati inficia pesantemente la validita' e coerenza delle soluzioni sul piano logico interpretativo.

4.2. CONDIZIONI PER L'ESISTENZA DI SOLUZIONI

Siano :

$$J = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \cdot \\ \underline{x}_i \\ \cdot \\ \underline{x}_m \\ \underline{y}_1 \\ \cdot \\ \underline{y}_j \\ \cdot \\ \underline{y}_r \end{bmatrix}$$

la matrice di dimensioni (m+r,n) delle variabili osservate;

C la matrice a valori reali di dimensioni (m+r,m+r+p+q) dei coefficienti definita nella formula (3.3).

La ricerca di soluzioni per il modello Lisrel consiste nella individuazione delle matrici a valori reali:

$$T = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \\ \cdot \\ \underline{t}_h \\ \cdot \\ \underline{t}_q \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni (q,n) delle variabili latenti;

$$G = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 \\ \cdot \\ \underline{g}_w \\ \cdot \\ \underline{g}_p \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni (p,n) degli errori nelle equazioni;

$$E = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \cdot \\ \underline{e}_i \\ \cdot \\ \underline{e}_m \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni (m,n) degli errori nelle variabili;

$$D = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \cdot \\ \underline{d}_j \\ \cdot \\ \underline{d}_r \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni (r,n) degli errori nelle variabili;

o, in forma compatta, della matrice di dimensioni (m+r+p+q,n):

$$(4.1) \quad L = \begin{bmatrix} T \\ G \\ E \\ D \end{bmatrix}$$

tale che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$(4.2) \quad J = CL$$

subordinatamente alle condizioni che :

(4.3) $TG' = O$; $TE' = O$; $TD' = O$; $GE' = O$; $GD' = O$; $ED' = O$

(4.4) $TT' = S_T$; $GG' = S_G$; $EE' = S_E$; $DD' = S_D$.

Le condizioni (4.2), (4.3), (4.4) sono riesprimibili in forma compatta nel modo seguente:

(4.5) $LL' = S_L$

con:

(4.6) $$S_L = \begin{bmatrix} S_T & & & O \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ O & & & S_D \end{bmatrix}$$

Si dimostra che e' sempre possibile individuare una soluzione (4.1) che soddisfi alle condizioni (4.2), (4.3), (4.4), qualora sia definita la matrice di varianze covarianze del modello:

(4.7) $S_J = J J' = C S_L C'$

con S_L definita come in (4.6)

Teorema 1^

Sia definita la matrice di varianze-covarianze delle variabili osservate S_J di dimensioni $(m+r,n)$,rango k ($O \leq k \leq m+r$) e varianze tutte positive.Sia definita la matrice di varianze-covarianze del modello Lisrel (4.7) con S_J matrice reale grammiana definita in (4.6) e C matrice reale dei coefficienti definita in (3.3).

Esiste la matrice L (4.1),di dimensioni $(m+r+p+q,n)$ che soddisfa alla relazione (4.2) subordinatamente alle condizioni (4.3) e (4.4) .

Dimostrazione

Dalla (4.7) si deduce che il rango della matrice S_J, sempre positivo per ipotesi, non e' mai superiore al rango della matrice S_L in quanto il rango di una matrice prodotto e' sempre inferiore al rango di una matrice fattore:

$$(4.8) \qquad rg\,(S_J) = rg(\,C\,S_L\,C') \leq rg\,(\,S_L\,)$$

Si definiscono come matrici grammiane tutte le matrici che, come la matrice di varianze-covarianze di variabili latenti ed errori S_L, sono quadrate, simmetriche e semidefinite positive (Basilevsky 1983 p.136).

Si dimostra che (Guttmann 1942 p.3) data una matrice grammiana S_L di ordine (m+r+p+q,m+r+p+q) esiste una matrice F di ordine (m+r+p+q,f) e rango f tale che :

$$(4.9) \qquad S_L = FF'$$

Sempre per il menzionato teorema sul rango delle matrici:

$$(4.10) \qquad rg\,(S_J) = rg(\,C\,S_L\,C') = rg\,(\,CFF'C')\leq rg\,(\,F\,)$$

Essendo per ipotesi:

$$(4.11) \qquad rg\,(S_J) = k \leq m+r$$

(con segno di uguaglianza che vale nella disuguaglianza (4.9) se S_J e' non singolare)

si ha:

$$(4.11\ bis\ ) \qquad k\leq m+r \leq f$$

b) Si denomini come spazio euclideo f-dimensionale l'insieme di tutti i vettori a f dimensioni f_v e lo si denoti con il simbolo V_f ; l'insieme di tutti i vettori a m+r dimensioni q_z come spazio euclideo m+r dimensionale e lo si denoti col

...mbolo V_{m+r} .

Dalla (4.11) si deduce che :

(4.12) $V_f \supset V_{m+r}$

lo spazio euclideo a m+r dimensioni e' contenuto nello spazio a f dimensioni.

Si definisca a questo punto:

$$B_0 = \begin{bmatrix} \underline{f}_{b_1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{b_p} \\ \vdots \\ \underline{f}_{b} \end{bmatrix}$$

una matrice di dimensioni (f,n) le cui f righe sono vettori linearmente indipendenti, standardizzati, incorrelati e tali che le loro combinazioni lineari formano lo spazio V_f

(4.13) $\underline{f}_{b_s} \underline{f}'_{b_s} = 1$; $\underline{f}_{b_s} \underline{f}'_{b_t} = 0$ $(s \neq t; s,t=1,2...f)$

Si dimostra (Tackeuchi 1982 p.5) che un siffatto insieme di f righe, chiamato base ortonormale di V_f ,esiste sempre.

Dal fatto che lo spazio V_{m+r} a m+r dimensioni e'contenuto nello spazio a f dimensioni discende che ogni vettore appartenente allo spazio V_{m+r} puo' essere ricavato attraverso trasformazione lineare di insiemi di vettori appartenenti allo spazio V_f e in particolare della sua base ortonormale B_0 .

In altre parole, esiste sempre , per $V_f \supset V_{m+r}$, una matrice di dimensioni (m+r,f) che trasformi la matrice B_0 nella matrice J_0

(4.14) $J = MB_O$

Dalla (4.13) e (4.14) si ricava che:

(4.15) $S_J = M\,B\,B_O'\,M' = MM'$

Si osserva da (4.9) e (4.15) che CF e M sono entrambe matrici fattori della stessa matrice S_J e inoltre dello stesso ordine (m+r, f).

Si dimostra (Guttmann 1942, p.3) che per le proprieta' delle matrici grammiane, esiste una matrice ortogonale Φ di ordine f tale che:

(4.16) $M = CF\Phi$

Si ha percio' da (4.15),(4.16):

(4.17) $S_J = MB_O\,B_O'\,M' = CF\Phi\,B_O\,B_O'\,\Phi'F'C'$

Indicando con L la matrice composta di dimensioni (m+r+p+q,n) $F\Phi B$

(4.18) $L = F\Phi B_O$

si ha da (4.7) , (4.17),(4.18):

(4.19) $S_J = J\,J' = C\,S_L\,C' = CLL'C'$

e quindi :

(4.20) $J = MB_O = CL$

Dalla definizione di S_L, matrice diagonale a blocchi, si deduce che le matrici quadrate collocate sulla diagonale sono composte rispettivamente da q,p,m,r righe.

Si puo' quindi partizionare la matrice L,denominando T, G, E, D la 1^,2^,3^,4^ sottomatrice di L di dimensioni rispettivamente (p,n), (q,n), (m,n) (r,n) . Esiste quindi la matrice (4.1) che soddisfa la (4.2),come volevasi dimostrare.

Per provare la (4.5) si ha da (4.9) e (4.17) :

(4.21) $LL' = F\Phi B_O\,B_O'\,\Phi'F' = FF' = S_L$

Dalla partizione di L nelle sottomatrici T,G,D,E si ricava che:

$$
(4.22) \qquad S_L = \begin{bmatrix} S_T & ; TG' ; & TE' ; & TD \\ GT' ; & S_G ; & GE' ; & GD' \\ ET' ; & EG' ; & S_E ; & ED' \\ DT' ; & DG' ; & DE' ; & S_D \end{bmatrix}
$$

Ma la struttura di S_L e' definita per ipotesi dalla (4.6),che mostra come le matrici non poste sulle diagonale sono nulle. Percio' sono soddisfatte anche le condizioni (4.2) e (4.3) .

4.3. STRUTTURA DELLE SOLUZIONI: CONDIZIONI SUFFICIENTI

4.3.1. Posizione del problema

Attraverso il teorema 1 si e' dimostrato che esistono soluzioni per il modello Lisrel, se e'data la matrice di varianze-covarianze del modello.Dal teorema 1 si deduce anche che le soluzioni non sono in generale uniche.Infatti qualora avvenga che:

$$(4.23) \qquad rg(S_L) > rg (C S_L C') = rg (S_J)$$

(com'e' possibile, per il citato teorema sul rango di un prodotto di matrici),essendo:

$$(4.23\ bis) \qquad rg\ L = rg\ LL' = rg\ S_L ;\ rg(J) = rg\ (JJ') = rg\ (S_J)$$

(Basilevsky 1983 p.131)

il numero di vettori linearmente indipendenti in L eccede il numero di vettori linearmente indipendenti in J e percio'non e' possibile determinare una soluzione unica per il modello a partire dai dati osservati, anche qualora sia definita la matrice di varianze covarianze S_L .

Secondo teorema, che mette in luce condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni per il modello , permette di chiarire il perche' della loro non unicita'.

TEOREMA 2^

Sia :

C la matrice dei coefficienti di dimensioni (m+r,m+r+p+q) ;

R una matrice reale di ordine (m+r+p+q, m+r) tale che:

(4.24) $$RS_J = S_L C' \qquad ;$$

F la matrice di dimensioni (m+r+p+q,f) che soddisfa la

(4.9) $$FF' = S_L \qquad ;$$

W una matrice di ordine (m+r+p+q, f) tale che :

(4.25) $$W = (I - R C) F \qquad ;$$

N una matrice di ordine (f,n) le cui righe sono standardizzate ,incorrelate tra loro e con le righe di J :

(4.26) $$NN' = I_f$$

(4.27) $$WNJ' = 0$$

Perche' nel teorema 1 la matrice soluzione L soddisfi alle condizioni di esistenza (4.2) subordinatamente alle condizioni (4.3) e (4.4) e' sufficiente che L abbia la seguente struttura:

(4.28) $$L = RJ + WN$$

con RJ componente fissa per ogni soluzione,WN componente variabile tra le diverse soluzioni L caratterizzate da medesima matrice di varianze covarianze S_L .

Dimostrazione

Perche' la (4.28) subordinatamente ai vincoli (4.9), (4.24),(4.25),(4.26),(4.27) sia condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni del modello Lisrel,occorre che le componenti RJ e WN della soluzione esistano sempre e siano spettate le condizioni di esistenza (4.2),(4.5),(4.6),enun ate nel teorema 1:

$$J = CL = C(RJ+WN) \tag{4.29}$$

$$S_L = (RJ+WN)(RJ+WN)' \tag{4.30}$$

con S_L definita in (4.6)

4.3.2. Componente fissa della soluzione

Si consideri innanzitutto la componente della soluzione RJ.

a) RJ esiste sempre.

Infatti quando S_J e' non singolare si ha da (4.24):

$$R = S_L C S_J^{-1} \tag{4.31}$$

Quando S_J e' singolare moltiplicando entrambi i membri della

(4.2) $J = CL$

per L', si ha:

$$JL' = CLL' = CS_L \tag{4.32}$$

e per la (4.24):

$$LJ' = S_L C' = RS_J \tag{4.33}$$

Da (4.33) si ottiene infine:

$$(L - RJ)\, J' = 0 \tag{4.34}$$

La (4.34) e' un sistema di equazioni normali dei minimi quadrati per predizione dell'insieme di variabili L attraverso un insieme di variabili J che ammette sempre soluzioni.

Dalla (4.34) si deduce anche il significato delle due componenti la soluzione L.La prima componente RJ e' una"stima" dei minimi quadrati delle variabili latenti L attraverso le variabili osservate J, mentre la seconda componente WN = L - RJ non puo' che essere il residuo della"stima"medesima (si usa termine "stima" nel senso di approssimazione e non in senso statistico).

b) RJ e' unica.

Dalla (4.31) si evince che quando S_J e' non singolare RJ e' unico.

Se invece S_J e' singolare si dimostra attraverso il seguente teorema che RJ e' ancora unico.

TEOREMA 3^

Si ipotizzi che esistono due soluzioni per l'equazione (4.34) date dalle due matrici reali R e R*:

(4.35) $$R S_J = S M'_L$$

(4.36) $$R^* S_J = S M'_L$$

Da (4.35) e (4.36) si ha:

(4.37) $$(R - R^*) S_J = JJ' = 0$$

J puo' essere scritto come $E_J H_J$ con E_J matrice reale di dimensioni (m+r,m+r) e H_J matrice di dimensioni(m+r,n) le cui righe costituiscono una base ortonormale dello spazio V_J

Si ha percio' in (4.37):

(4.38) $$(R - R^*) JJ' = (R - R^*) E_J H_J H'_J E'_J =$$

$$(R - R^*) E_J E_J' = 0$$

Si consideri ora il prodotto di matrici:

(4.39) $$(R - R^*) E_J E'_J (R - R^*)'$$

Se la matrice $(R - R^*) E_J E'_J$ e' nulla, come appare da (4.38),e' per forza nulla la (4.39) e in particolare la sua diagonale principale.

La somma degli elementi della diagonale principale della

(4.39) e' data dalla somma dei quadrati degli elementi di $(R-R^*)E_J$ perciò se e' nulla la (4.39) e' nulla anche $(R - R^*)E_J$ e di conseguenza anche $(R - R^*) E_J H_J$ e $(R - R^*)J$.

Perciò:

$$(4.40) \qquad RJ = R^*J$$

R e' unico anche per S_J singolare.

C) CRJ e' uguale a J.

Infatti, una volta stabilito che R e' unico, premoltiplicando entrambi i membri della (4.24) per la matrice dei coefficienti C si ottiene:

$$(4.41) \qquad CRS_J = C S_L C' = S_J$$

e :

$$(4.42) \qquad (CR - I) S_J = (CR - I) JJ' = 0$$

Dalla (4.42) per il teorema 3^ appena dimostrato:

$$(4.43) \qquad (CR - I) J = 0$$

e quindi

$$(4.44) \qquad CRJ = J$$

come volevasi dimostrare.

4.3.3. Componente variabile della soluzione

Si consideri ora la componente della soluzione WN

a) WN, per le condizioni (4.26) e (4.27) tale che:

$$NN'=I_f \quad ; \quad WNJ' = 0 \; ;$$

esiste sempre.

Dato lo spazio V_J nel quale sono definiti i vettori delle variabili osservate si definisca lo spazio ad esso ortogonale $V\perp_J$. E' sempre possibile costruire una base ortonormale di tale spazio e i vettori che costituiscono tale base sono per definizione ortogonali ad ognuno dei vettori delle variabili osservate. Se quindi come matrice N si prende una matrice le cui righe sono i vettori della base ortonormale di $V^{\perp}_{J}$ sono verificate le condizioni (4.26) e (4.27).

Poiche' vi e' piu' di una base dello spazio $V^{\perp}_{J}$ la matrice N non e' unica e quindi la componente WN non e' identica tra tutte le soluzioni caratterizzate da medesima matrice di varianze covarianze S_L.

b) Poiche'si e' visto che CRJ = J,perche' sia soddisfatta la condizione di esistenza (4.29)

$$CL = CRJ + CWN = J$$

occorre che CWN = 0, per qualsiasi N.

Tenendo conto della

$$(4.25) \quad W = (I - R\,C)\,F$$

si ha:

$$(4.45) \quad CWW' = C\,(I - RC)FF'(I - RC)'$$

Ricordando che per la (4.9)

$$FF' = S_L$$

e per la (4.24)

$$RS_J R' = S_L C'R'$$

si ha in (4.45):

$$(4.46) \quad CWW' = C(S_L - S_L C'R' - RCS_L + RCS_L C'R')$$

$$= CS_L - C\,S_L C'R' = CS_L - S_J R'$$

Ancora per la (4.24) si ha infine:

$$(4.47) \qquad CWW' = CS_L - CS_L = 0$$

Ricordando il teorema 3 si puo' affermare che essendo nulla CWW' sono nulle anche CWW'C' e quindi anche CW e CWN ,per qualsiasi N, come volevasi dimostrare.

c)Perche' le condizioni poste nel teorema 2 siano condizioni sufficienti a definire la struttura di una soluzione del modello Lisrel occorre ancora dimostrare la (4.30):

$$CLL'C' = C[RJ + WN][RJ + WN]'C' = S_J$$

Ricordando che N e' ortogonale e che JN'= O si ha:

$$(4.48) \qquad [RJ + WN]\,[RJ + WN]' =$$

$$R\,S_J\,R' + WW' =$$

$$R\,S_J\,R' + (I - RM)\,S_L\,(I - RM)'$$

e quindi:

$$(4.49) \qquad [RJ + WN]\,[RJ + WN]' =$$

$$RS_J R' + S_L - R\,M'S'_L - S_L\,M'R'$$

$$+ R\,S_J\,R'.$$

La (4.49) per la (4.24) e'uguale a :

$$(4.50) \qquad [RJ + WN]\,[RJ + WN]' = S_L$$

come volevasi dimostrare.

4.4.STRUTTURA DELLE SOLUZIONI :CONDIZIONI NECESSARIE

Si puo' ora verificare che le condizioni poste dal teorema 2 sono non solo sufficienti ma necessarie per definire la forma di una soluzione L del modello .

Poiche' la matrice RJ e' unica per tutte le soluzioni L , (una volta definite J,C,S_L) ,per verificare che la soluzione del modello Lisrel deve necessariamente avere la struttura indicata dalle condizioni e dai vincoli (4.9),(4.24)-(4.28), deve valere sempre la:

$$L - RJ = WN \tag{4.51}$$

A questo scopo si consideri l' uguaglianza:

$$(L - RJ)(L - RJ)' \tag{4.52}$$

Ricordando che :

$$L = RJ + WN$$

e che:

$$JN' = 0$$

si ottiene:

$$WW' = (L - RJ)(L - RJ)' = LL' - RS_J R' = S_L - RS_J R' \tag{4.53}$$

Se qualche elemento della diagonale di WW' e' nullo anche la corrispettiva riga di W e' nulla. Sia W_C una sottomatrice reale di W composta dalle c righe non nulle di W. Alle righe nulle di W corrispondono necessariamente righe nulle di (L - RJ) data l'uguaglianza (4.53).

Si ha percio':

$$(L - RJ)_C (L - RJ)'_C = W_C W'_C \tag{4.54}$$

ove $(L - RJ)_C$ e' la sottomatrice composta dalle righe non nulle di (L - RJ) ed ha quindi norma positiva.

Ricordando che la matrice identita' e'reale e grammiana si osserva che sussistono le condizioni per l'applicazione del teorema 1^ mostrato nel paragrafo 4.2 con $(L-RJ)_C$ per J, W_C per C, I per S_L .

Esiste sempre una matrice di variabili latenti N tale che

$$(L - RJ)_C = W_C N \tag{4.55}$$

Si orlino ora le matrici W_C e $(L - RJ)_C$ rispettivamente con le righe nulle di W e $(L - RJ)$.

Si ottiene infine:

$$(L - RJ) = WN \tag{4.56}$$

come volevasi dimostrare.