Capitolo 5

NDICI DI INDETERMINATEZZA E LORO INTERPRETAZIONE

INTRODUZIONE

capitolo quarto si e'verificato che, anche qualora siano cificati i valori numerici delle matrici di varianze arianze delle variabili osservate S_J, delle variabili tenti S_L e della matrici dei coefficienti C le variabili tenti del modello non sono uniche. Si e' visto anche che io' e' dovuto alla presenza nella soluzione di una omponente variabile interpretabile come l'errore in una tima dei minimi quadrati delle variabili latenti L ttraverso le variabili osservate J.

ualora si sia interessati non tanto ai valori della matrice i varianze covarianze S_L quanto ai valori assunti dalle ariabili latenti L in corrispondenza di ogni unita' tatistica, la loro non unicita' inficia pesantemente 'attendibilita' dei risultati e la loro interpretazione.

er avere un criterio di giudizio oggettivo sul grado di ttendibilita' dei risultati e' necessario introdurre un ndice di indeterminatezza che metta in luce l'entita' della ifferenza e della differenza massima fra soluzioni aratterizzate da medesima matrice di varianze covarianze S_L.

L'indice di indeterminatezza introdotto per le soluzioni el modello fattoriale con fattori ortogonali (Ledermann 938,Heermann 1964,1966) e con fattori non ortogonali Guttmann 1954,Schonemann 1971) e'il cosiddetto coefficiente di covarianza media minima, funzione del valore delle ovarianze tra soluzioni massimamente differenti.

In questo capitolo dapprima si costruiscono coefficienti ovarianza e correlazione media minima per le soluzioni modello Lisrel e, quindi, attraverso opportune trasforma ni si mettono in luce le relazioni di tali coefficienti gli autovalori della matrice di varianze covarianze delle le soluzioni.

2. COEFFICIENTE DI COVARIANZA MINIMA

i considerino due soluzioni L e L^:

J = CL

J = CL^

tali che:

$$S_J = C\, S_L\, C'$$

La matrice di covarianze tra le soluzioni L e L^ e' data da:

(5.1) $$L\hat{}L' = [R\hat{}J\hat{} + W\hat{}N\hat{}]\,[R'J' + W'N']$$

Essendo RJ uguale per ogni soluzione e JN' = 0, la (5.1) e'uguale a:

(5.2) $$L\hat{}L' = R\, S_J\, R' + W\hat{}N\hat{}N'W'$$

Un opportuno indice delle differenze esistenti tra le soluzioni L e L^ puo' essere basato sulla traccia della matrice (5.2), vale a dire dalla somma dei coefficienti di covarianza tra elementi corrispondenti delle due soluzioni.

Una misura sintetica del grado di indeterminatezza complessivo delle soluzioni del modello e' dato quindi dal minimo di tale traccia, relativa alla coppia di soluzioni per cui e' minima la somma delle covarianze tra elementi corrispondenti.

Al fine di individuare la traccia minima occorre minimizzare la matrice di covarianze (5.1).

Si osservi che, poiche' L^ e L hanno identica matrice di

...anze covarianze S_L :

$$(5.3)\qquad S_L = R S_J R' + \hat{W}\hat{N}\hat{N}'\hat{W}' = R S_J R' + WNN'W'$$

...cessariamente :

$$(5.4)\qquad \hat{W}\hat{N}\hat{N}'\hat{W}' = WNN'W'$$

...altra parte, essendo fisso $R S_J R'$, proprio il prodotto ...a le matrici $\hat{W}\hat{N}$ e WN nella (5.2) e'l'elemento variabile ...he puo' minimizzare il valore della matrice di covarianze $\hat{L}L'$.

Per l'ineguaglianza di Cauchy- Schwartz (Basilevsky 1983 p.22) dati due vettori $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ e le loro norme $\|\underline{w}_1\|, \|\underline{w}_2\|$ si ha:

$$(5.5)\qquad -\|\underline{w}_1\|\|\underline{w}_2\| \le \underline{w}_1\underline{w}_2' \le \|\underline{w}_1\|\|\underline{w}_2\|$$

Percio' si ha per il prodotto di matrici $\hat{W}\hat{N}N'W'$ che appare in (5.2):

$$(5.6)\qquad -(\hat{W}\hat{N}\hat{N}'\hat{W}')(WNN'W') \le (\hat{W}\hat{N}N'W')^2 \le$$
$$\le (\hat{W}\hat{N}\hat{N}'\hat{W}')(WNN'W')$$

e tenendo conto della (5.4):

$$(5.7)\qquad -(WNN'W')^2 \le (\hat{W}\hat{N}N'W')^2 \le (WNN'W')^2$$

Percio' la matrice $\hat{W}\hat{N}$ assume il suo minimo per :

$$(5.8)\qquad \hat{W}\hat{N} = -WN$$

Si ha percio' nella (5.3):

$$(5.9)\qquad \text{Min}(\hat{L}L') = S_L = R S_J R' - 2\,WNN'W' = R S_J R' - 2\,WW'$$

La (5.9), che prende il nome di matrice di covarianza minima, puo' essere espressa attraverso le matrici di varianze covarianze delle variabili latenti e dei parametri del modello Lisrel. Nell' ipotesi di non singolarita' della e S_J ricordando la (4.31):

$$S_L C' S_J^{-1}$$

4.48):

$$S_L - R S_J R'$$

(3.2) e la (3.3):

$$\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P & ; & L_X (I-A)^{-1} & ; & I_m & ; & O \\ L_Y & ; & O & ; & O & ; & I_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_T & & & O \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ O & & & S_D \end{bmatrix}$$

partizionando in modo opportuno la matrice inversa della

trice di varianze covarianze S_J^{-1} :

$$= \begin{bmatrix} S_1 & ; & S_2 \\ S_3 & ; & S_4 \end{bmatrix}^{-1}$$

ttiene da (5.9):

$$(5.10)\quad S_{L\,min} = 2 \begin{bmatrix} S_T & & & O \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ O & & & S_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P'(I-A)'^{-1} L_X' & ; & L_Y' \\ (I-A)'^{-1} L_X' & ; & O \\ I_m & & O \\ O & ; & I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_1 & ; & S_2 \\ & & \\ S_3 & ; & S_4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{1} P & ; & L_y(I-A)^{-1} & ; & I_m & ; & O \\ L_Y & ; & O & ; & O & ; & I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & & & O \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ O & & & S_D \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & & & O \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ O & & & S_D \end{bmatrix}$$

Un opportuno indice di indeterminatezza delle soluzioni del modello Lisrel e'dato dalla traccia della (5.6), vale a dire dalla somma dei coefficienti di covarianza minima tra singoli elementi di soluzioni equivalenti.

Qualora si voglia avere un indice normalizzato si rapporta tale traccia alla somma delle varianze dei singoli elementi di una medesima soluzione del Lisrel.

Si ha:

$$(5.11)\qquad W_m = \frac{tr\ S_{L\,min}}{tr\ S_L}$$

che prende il nome di coefficiente di covarianza media minima.

seconda misura dell'indeterminatezza e' invece data
somma dei rapporti tra coefficienti di covarianza
ma e corrispondenti varianze di ogni elemento della
uzione.

e somma e' uguale alla traccia della matrice di
rrelazione minima che si ottiene premoltiplicando e
stmoltiplicando la matrice di covarianza minima per la
trice diagonale $D_L^{-1/2}$ i cui elementi non nulli sono i
eciproci delle radici quadrate delle varianze degli
elementi della soluzione:

$$S_{C\,min} = D_L^{-1/2} \; S_{L\,min} \; D_L^{-1/2} \tag{5.12}$$

Sia il coefficiente di covarianza minima che il coefficiente di correlazione minima sono normalizzati ma hanno significato differente. Il coefficiente di covarianza minima e' influenzato soprattutto dalle variabili caratterizzate da varianza (e quindi covarianza minima) maggiore mentre il coefficiente di correlazione minima, somma di rapporti tra covarianze minime e varianze, "pesa" in modo uguale il contributo di ogni variabile ed errore all'indeterminatezza del modello.

5.3. l'INTERVALLO PER IL COEFFICIENTE DI COVARIANZA MINIMA

Come si e' visto nel paragrafo precedente la misura dell'indeterminatezza per il coefficiente di covarianza minima non e' indipendente ne' dai dati osservati, ne' dalla particolare struttura che identifica il modello.

Allo scopo di illuminare maggiormente il significato dei ficiente di covarianza e correlazione minima si indivi

no relazioni tra gli estremi di intervalli in cui

uramente si situa il valore dei coefficienti e gli autova

i della matrice delle soluzioni .

primo intervallo e' ottenuto estendendo al caso del Lisrel

metodologia proposta da Schonemann e Wang (1972) per

modello fattoriale.

ricorda che per le regole sulle matrici grammiane

Guttmann 1944 p.5)

$$(5.13)\qquad C_v = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P S_T^{1/2} & ; & L_X (I-A)^{-1} S_G^{1/2} & ; & S_E^{1/2} & ; & 0 \\ L_Y S_T^{1/2} & ; & 0 & ; & 0 & ; & S_D^{1/2} \end{bmatrix}$$

' esprimibile nel seguente modo(Basilevsky 1983 p.214)

$$(5.14)\qquad C_v = [\Phi, 0]\, Q$$

on Φ matrice di dimensioni $(m+r, m+r)$ e Q matrice ortogonale

i dimensioni $(m+r+p+q)$.

a matrice di covarianza S_J e' quindi uguale a;

$$(5.15)\qquad S_J = C_v C_v' = \Phi\Phi'$$

la matrice di covarianza minima $S_{L\,min}$:

$$(5.16)\qquad S_{L\,min} = 2\, S_L^{1/2}\, Q'\Phi'(\Phi\Phi')^{-1}\Phi\, Q\, S_L^{1/2} - S_L$$

$$= 2\, S_L^{1/2}\, Q'\,\Theta\, Q\, S_L^{1/2} - S_L$$

on:

$$= \begin{bmatrix} I_{m+r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

regole sulla traccia di un prodotto di matrici:

$$7) \quad tr\, S_{L\,min} = 2\, tr\, \Theta\, Q\, S_L\, Q' - S_L$$

raccia della matrice prodotto $Q\, S_L\, Q'$ con Q matrice ortogonale enz'altro inferiore alla traccia della matrice $W_L\, S_L\, W'_L$ con W_L trice degli autovettori di S_L ,per le regole sulla ssimizzazione di forme quadratiche (Basilevsky 1983 p.146-147) on vettori ortogonali.

'altra parte per le regole sulla decomposizione spettrale di una atrice $W_L\, S_L\, W'_L$ e' uguale a:

$$(5.18) \qquad W_L\, S_L\, W'_L = \phi_L$$

ve ϕ_L e' matrice degli autovalori di S_L .

Percio' la (5.17) e'inferiore a :

$$(5.19) \qquad tr\, S_{L\,min} = 2\, tr\, (\, \Theta\, \phi_L - S_L\,)$$

Il prodotto $\Theta\, \phi_L$, chiamato traccia parziale di ϕ_L , e' massimo qualora alle prime m+r righe della matrice ϕ_L sono covarianza delle variabili latenti S_L .

Dati gli autovalori della matrice S_L ordinati in senso crescente , la somma dei coefficienti di covarianza minima e' compresa tra i piu' elevati e i meno elevati autovalori della matrice S_L .

$$2\sum_{i=m+r+1}^{m+r+p+q}\delta_{iL} - tr\,S_T - tr\,S_G - tr\,S_E - tr\,S_D < S_{C\,min} <$$

$$< 2\sum_{i=1}^{m+r}\delta_{iL} - tr\,S_T - tr\,S_G - tr\,S_E - tr\,S_D$$

δ_{iL} i-esimo autovalore (i= 1,2...m+r+p+q) della rice S_L .

espressioni a destra e sinistra dei segni di uguaglianza in (5.20) sono l'estremo inferiore e periore di un intervallo entro cui sicuramente si situa il lore della traccia della matrice di covarianza minima r una struttura del modello identificata da date trici dei parametri e dei varianze-covarianze di variabili tenti.Tali estremi,come gli estremi degli intervalli roposti da Schönemann e Wang(1972) per il modello attoriale,non possono pero'intendersi quali massimi e minimi el coefficiente di covarianza media minima in quanto,per ttenerli si e' sostituito alla matrice ortogonale Q la atrice degli autovettori di S_L W_L .

on metodologia identica a quella vista finora si ricava un ntervallo entro i cui estremi sicuramente si situa il valore ella traccia della matrice di correlazione minima.

.4. 2^ INTERVALLO PER IL COEFFICIENTE DI COVARIANZA MINIMA

Si consideri la traccia della matrice di covarianza minima (5.10) :

(5.21) $tr\,S_{L\,min} = tr\,(2\,S_L C'\,S_J^{-1}\,C\,S_L - S_L)$

che per le proprieta' della traccia e' equivalente a:

(5.22) $tr\,(2\,S_J^{-1/2}\,C\,S_L^{2}\,C'S_J^{-1/2} - S_L)$

rdando che:

$$\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P & ; & L_X (I-A)^{-1} & ; & I_m & ; & 0 \\ L_Y & ; & 0 & ; & 0 & ; & I_r \end{bmatrix}$$

denominando :

$$V_A = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P \\ L_Y \end{bmatrix} ; \quad V_B = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

(5.23)

$$V_C = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad V_D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix} ;$$

le sottomatrici di dimensioni (m+r,q),(m+r,p),(m+r,m),(m+r,r) della matrice C si puo' riscrivere la (5.21) nel seguente modo:

(5.24) $$\mathrm{tr}\, S_{L\,min} =$$

$$2\,\mathrm{tr}\,(S_J^{-1/2} V_A S_T^2 V'_A S_J^{-1/2}) + 2\,\mathrm{tr}\,(S_J^{-1/2} V_B S_G^2 V'_B S_J^{-1/2}) +$$

$$2\,\mathrm{tr}\,(S_J^{-1/2} V_C S_E^2 V'_C S_J^{-1/2}) + 2\,\mathrm{tr}(S_J^{-1/2} V_D S_D^2 S_J^{-1/2}) - \mathrm{tr}\, S_L$$

Definite:

[illegible]$_i$ come la i-esima riga di $S_J^{-1/2} V_A S_T^{1/2}$;

$\underline{x}_j$ come la j-esima riga di $S_J^{-1/2} V_B S_G^{1/2}$;

$\underline{p}_l$ come la l-esima riga di $S_J^{-1/2} V_C S_E^{1/2}$;

$\underline{q}_m$ come la m-esima riga di $S_J V_D S_D^{1/2}$;

natura della traccia ,la (5.25) e'equivalente a:

$$\text{)}\quad tr\, S_{L\,min} = \sum_{i=1}^{m} r_{-i} S_T r'_{-i} + \sum_{j=1}^{m} k_{-j} S_G k'_{-J} + \sum_{l=1}^{r} p_{-l} S_E p'_{-l} + \sum_{m=1}^{r} q_{-m} S_D q'_{-m} - tr\, S_L$$

$$\text{26)}\quad tr\, S_{L\,min} = 2\sum_{r=1}^{m} \frac{r_{-i} S_T r'_{-i}}{r_{-i-i} r'} r_{-i-i} r' + 2\sum_{j=1}^{m} \frac{k_J S_G k'_{-J}}{k_{-j-j} k'} k_{-j-j} k' + 2\sum_{l=1}^{r} \frac{p_{-l} S_E p'_{-l}}{p_{-l-l} p'} p_{-l} p'_{-l} + 2\sum_{m=1}^{r} \frac{q_{-m} S_D q'_{-m}}{q_{-m} q'_{-m}} q_{-m} q'_{-m} - tr\, S_L$$

quozienti di Raleigh (Basilevsky 1983 p.240) che appaiono ome addendi delle quattro sommatorie nella (5.26) hanno come ssimo ordinatamente gli autovalori massimi δ_{1T} della matrice , δ_{1G} della matrice S_G , δ_{1E} della matrice S_E , δ_{1D} della trice δ_{1D} .

rcio'la (5.26) non e'mai superiore a:

$$\text{5.27)}\quad L_S = 2\Big(\delta_{1T} \sum_{i=1}^{m} r_{-i} r'_{-i} + \delta_{1G} \sum_{j=1}^{m} k_{-j} k'_{-j} + \delta_{1E} \sum_{l=1}^{m} p_{-l} p'_{-l} + \delta_{1D} \sum_{m=1}^{r} q_{-m} q'_{-m}\Big) - tr\, S_L$$

he puo' essere espresso in forma piu' esplicita tenendo onto della (5.23) e (5.24) :

$$L_S = 2[(\delta_{1T}\ tr\,(V_A\ S_T\ V_A'S_J^{-1}) + \delta_{1G}\ tr(V_B\ S_G\ V_B'S_J^{-1})$$

$$+ \delta_{1E}\ tr(V_C\ S_E\ V_C'S_J^{-1}) + \delta_{1D}\ tr\,(V_D\ S_D\ V_D\ S_J^{-1})]$$

$$- tr\ S_L$$

Partizionando in modo opportuno la matrice S_J^{-1} :

$$S_J^{-1} = \begin{bmatrix} S_{JA} \\ S_{JB} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

con S_{JA} matrice di dimensioni $(m,m+r)$, S_{JB} matrice di dimensioni $(r,m+r)$;

denominando δ_{1F} il primo autovalore della matrice

$$S_F = \begin{bmatrix} S_T & O \\ O & S_G \end{bmatrix}$$

che e' necessariamente o il primo autovalore della matrice S_T δ_{1T} o il primo autovalore della matrice S_G δ_{1G} ;

e tenendo conto della (5.23), da (5.28) si ottiene :

$$(5.30)\quad L_S =$$

$$\operatorname{tr}\ \delta_{1F} \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P S_T P'(I-A')^{-1} L'_X + L_X (I-A) S_G (I-A')L'_X \ ; \ L_X (I-A')^{-1} S_T L'_Y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_{JA} \\ S_{JB} \end{bmatrix}$$

$$+\,2\ \operatorname{tr}\ \delta_{1T} \begin{bmatrix} L_Y S_T (I-A')^{-1} L'_X \ ; \ L_Y S_T L'_Y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_{JA} \\ S_{JB} \end{bmatrix}$$

$$+\,2\ \operatorname{tr} \begin{bmatrix} \delta_{1E} S_E \ ; \ \delta_{1D} S_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_{JA} \\ S_{JB} \end{bmatrix} - \operatorname{tr} S_L$$

Ricordando la struttura della matrice di varianze-covarianze del modello Lisrel da (5.30) si ottiene :

$$(5.31)\quad L_S = 2(\delta_{1F}\ \operatorname{tr}\ (I_m - S_E S_{JA}) + \delta_{1T}\ \operatorname{tr}\ (I_r - S_D S_{JB})$$
$$+ \delta_{1E}\ \operatorname{tr}\ (S_E S_{JA}) + \delta_{1D}\ \operatorname{tr}\ (S_D S_{JB}))$$
$$- \operatorname{tr} S_L$$

e in definitiva:

$$(5.32)\quad L_S = 2m\ \delta_{1F} + 2r\ \delta_{1T} + 2(\delta_{1E} - \delta_{1F})\ \operatorname{tr} S_E S_{JA}$$
$$2(\delta_{1D} - \delta_{1T})\ \operatorname{tr} S_D S_J - \operatorname{tr} S_L$$

La (5.31) e' funzione degli autovalori massimi delle matrici di covarianza di variabili latenti ed errori S_T, S_G, S_E, S_D .

Attraverso un procedimento identico si dimostra che la traccia della matrice di covarianza minima non e' mai inferiore a:

$$(5.33)\quad L_I = 2m\ \delta_{(p+q)F} + 2r\ \delta_{qT} + 2(\delta_{mE} - \delta_{(p+q)F}\ \operatorname{tr} S_E S_{JA}^{-1}$$
$$2(\delta_{rD} - \delta_{qT})\ \operatorname{tr} S_D S_J^{-1} - \operatorname{tr} S_L$$

$\delta_{(p+q)F}$, δ_{qT}, δ_{mE}, δ_{rD} autovalori minimi delle matrici

S_T, S_E, S_D.

(5.32) e la (5.33) sono gli estremi superiore ed inferiore un intervallo entro cui sicuramente si situa il valore del traccia della matrice di covarianza minima per una strut ura del modello identificata da date matrici

S_J, S_F, S_H, V.

Tuttavia tali estremi non sono massimo e minimo della traccia della matrice di covarianza minima in quanto sono ottenuti attraverso la massimizzazione dei singoli elementi di tale traccia e non della traccia nel suo complesso.

Con identico metodo si ricavano estremo superiore ed inferiore di un intervallo entro cui sicuramente si situa il valore della traccia della matrice di correlazione minima.

RELAZIONI TRA MATRICE DI COVARIANZA MINIMA E ALTRE GRANDEZZE

La traccia della matrice di covarianza minima :

$$(5.34)\qquad tr\, S_{L\,min} = tr\,(2\, S_J^{-1/2}\, C\, S_L^2\, C' S_J^{-1/2} - S_L)$$

è equivalente, per le regole sulla traccia e la configurazione della matrice S_L alla matrice :

$$(5.35)\qquad tr\, S_{L\,min} =$$

$$2\, tr\,(S_J^{1/2}\, V\, S_F^2\, V'\, S_J^{-1/2}) + 2\, tr\, 2(S_J^{-1/2}\, S_H^2\, S_J^{-1/2}) - tr\, S_L$$

Per le regole sulla decomposizione spettrale delle matrici le matrici S_F^2 e S_H^2 possono essere decomposte nel seguente modo:

$$(5.36)\qquad S_F = Q_F\, \phi_F^2\, Q'_F$$

$$(5.37)\qquad S_H^2 = Q_H\, \phi_H^2\, Q'_H$$

con Q_F e Q_H matrici ortogonali di dimensioni (p+q,p+q) e (m+r,m+r) le cui colonne sono gli autovettori di S_F e S_H ; ϕ_F ϕ_H matrici diagonali i cui elementi non nulli sono gli autovalori di S_F e S_H .

Sempre per le regole sulla decomposizione spettrale delle matrici:

$$(5.38)\qquad S_F^2 = \sum_{i=1}^{p+q} f_i^2\, q_{-iF}\, {}'q_{-iF} = \sum_{i=1}^{p+q} f_i\, S_{iF}$$

$$(5.39)\qquad S_H^2 = \sum_{g=1}^{m+r} h_g\, q_{-gH}\, {}'q_{-gH} = \sum_{g=1}^{m+r} h_g\, S_{gH}$$

q'_{iF} i-esimo autovettore della matrice S_F ;

q'_{gH} g-esimo autovettore della matrice S_H ;

f_i i-esimo autovalore della matrice S_F ;

h_g g-esimo autovalore della matrice S_H ;

$S_{iF} = f_i \; q'_{iF} \; q_{iF}$;

$S_{gH} = h_g \; q'_{gH} \; q_{gH}$;

Sostituendo nella (5.34) i valori individuati in (5.38) e (5.39) si ottiene:

(5.40) $$\mathrm{tr}\, S_{L\,min} = 2\,\mathrm{tr}\,(S_J^{-½}\, V \sum_{i=1}^{p+q} f_i \; S_{iF} \; V'\, S_J^{-½}) + 2\,\mathrm{tr}\,(S_J^{-½} \sum_{g=1}^{m+r} h_g \; S_{gH} \; S_J^{-½}) - \mathrm{tr}\, S_L$$

b)Si ricorda ora che ,l'autovalore di una somma di matrici e' uguale alla somma degli autovalori di ogni matrice addendo nella somma.(Searle 1982 p.277)

Percio' date le uguaglianze:

(5.41) $$S_J^{-½}\, V\, S_F\, V'\, S_J^{-½} = S_J^{-½}\, V \sum_{i=1}^{p+q} S_{iF} \; V'\, S_J^{-½})$$

(5.42) $$S_J^{-½}\, S_H\, S_J^{-½} = S_J^{-½} \sum_{g=1}^{m+r} S_{gH} \; S_J^{-½}$$

ogni autovalore di

$S_J^{-½}\, V\, S_F\, V'\, S_J^{-½}$ e' la sommatoria degli autovalori

$$S_J^{-1/2} V S_{iF} V' S_J^{-1/2} ;$$

autovalore di

$S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$ e'la sommatoria degli autovalori

$$S_J^{-1/2} S_{gH} S_J^{-1/2} .$$

altra parte l'autovalore di un prodotto di uno scalare per na matrice e' uguale al prodotto tra scalare e autovalore; ercio' il k-esimo autovalore della matrice di covarianza inima e'esprimibile nel seguente modo:

$$(5.43) \quad c_k = \sum_{i=1}^{p+q} f_i \alpha_{ik} + \sum_{g=1}^{m+r} h_g \mu_{gk}$$

ove:

c_k e' il k-esimo autovalore della matrice di covarianza minima

α_{ik} e' il k-esimo autovalore della matrice

$$S_J^{1/2} V S_{iF} V' S_J^{1/2}$$

e μ_{gk} e' il k-esimo autovalore della matrice

$$S_J^{-1/2} S_{gH} S_J^{-1/2} .$$

c) Si voglia mettere in luce il rapporto esistente tra il k esimo autovalore di

$$S_J^{-1/2} V S_F^2 V' S_J^{-1/2}$$

pari al primo addendo della (5.43) e il k-esimo autovalore di

$$S_J^{-1/2} V S_F V' S_J^{-1/2} = I_{m+r} - S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$$

...lla sommatoria degli autovalori α_{ik} .Si ha:

$$\sum_{i=1}^{p+q} f_i \alpha_{ik} = w_k \sum_{g=1}^{p+q} \alpha_{ik} = w_k \alpha_k \qquad \text{...4)}$$

... α_k autovalore k-esimo di

$$I_{m+r} - S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$$

... w_k scalare.

...denticamente il rapporto esistente tra il k-esimo autovalore

...i

$$S_J^{-1/2} S_H^2 S_J^{-1/2}$$

...ari al secondo addendo della (5.42) e il k-esimo autovalore

...i

$$S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$$

...' pari alla sommatoria degli autovalori μ . Si ha:

$$\sum_{g=1}^{m+r} h_g \mu_{gh} = p_k \sum_{g=1}^{m+r} \mu_{gk} = p_k \mu_k \qquad (5.45)$$

...on μ_k autovalore k-esimo di

$$S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$$

e p_k scalare.

Da (5.44) e (5.45) si evince che :

$$\alpha_k = 1-\mu_k \qquad (5.46)$$

In definitiva c_k k-esimo autovalore della matrice di covarianza minima e' uguale a :

(5.47) $c_k = w_k (1-\mu_k) + p_k \mu_k = w_k + (p_k - w_k) \mu_k = w_k + v_k \mu_k$

$v_k = p_k - w_k$

a l'equivalenza tra somma degli autovalori e traccia di a matrice, la traccia della matrice di covarianza minima e' uguale a:

$$(5.48) \quad tr\, S_{L\,min} = \sum_{k=1}^{m+r} (w_k + v_k \mu_k)$$

Ogni autovalore della matrice di covarianza minima e' combinazione lineare dei rispettivi autovalori delle matrici I_{m+r} e $S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$ con pesi dati da w_k e v_k.

Esiste percio', in particolare, una relazione funzionale tra ogni autovalore della matrice di covarianza minima e il rispettivo autovalore di $S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$.

Non e' possibile tuttavia, a priori, determinare se tale relazione e' diretta o inversa poiche' la differenza $(p_k - w_k)$ puo' assumere valore positivo o negativo.

Le proprieta' degli autovalori consentono di chiarire il significato dei pesi p_k e w_k.

Dato un autovalore δ di una matrice Φ, l'autovalore $l\delta$, con l scalare, e' l'autovalore della matrice $l\Phi$ (Searle 1982 p.277). I pesi p_k e w_k sono percio' gli scalari per cui si devono moltiplicare rispettivamente le matrici I_{m+r} e $S_J^{-1/2} S_H S_J^{-1/2}$, perche' dalla matrice cosi'ottenuta sia possibile ricavare il k-esimo autovalore della matrice di covarianza minima.

MODELLO LISREL E INCORRELAZIONE DI VARIABILI LATENTI ED ERRORI

puo' considerare il modello Lisrel con variabili latenti errori standardizzati e incorrelati. Indicando con C* la trice dei coefficienti valida per questo paricolare caso,il odello assume la seguente configurazione:

(5.49) $J = C^*L$

con matrice di varianze covarianze:

(5.50) $S_J = C^*C^{*'}$

In questo caso ,come per il modello di analisi fattoriale con fattori comuni ortogonali, il coefficiente di covarianza media minima e'pari alla differenza fra numerosita' delle variabili osservate e latenti ed e' indipendente dalla struttura dei dati osservati e dai vincoli posti su parametri e variabili latenti del modello. Infatti la traccia della matrice di covarianza minima assume la seguente formulazione :

(5.51) $$\mathrm{tr}\, S_{L\,min} = 2\, \mathrm{tr}\, C^{*'}S_J C^{*-1} - \mathrm{tr}\, I_{m+r+p+q}$$

$$= 2\, \mathrm{tr}\, C^*C^{*'}S_J^{-1} - m - r - p - q$$

$$= 2\,(m+r) - m - r - p - q = m + r - p - q$$

Si puo' considerare anche un modello Lisrel con errori nelle variabili standardizzati e incorrelati :

(5.52) $J = C^*_1\, L_1$

con C^*_1 dato da:

$$
C^{*}_{1} = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P & ; & L_X (I-A)^{-1} & ; & S_E^{1/2} & ; & 0 \\ L_Y & ; & 0 & ; & 0 & ; & S_D^{1/2} \end{bmatrix}
$$

$$
S_{L1} = \begin{bmatrix} S_T & & & \\ 0 & S_G & 0 & 0 \\ & & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}
$$

e matrice di varianze-covarianze:

$$
(5.53) \qquad S_J = C^{*}_{1} \, S_{L1} \, C^{*\prime}_{1}
$$

La matrice S_{L1} e' reale e simmetrica e valgono quindi tutte le dimostrazioni effettuate nel capitolo 4.

La matrice di covarianza minima ha percio' la seguente struttura :

$$
(5.54) \qquad S^{*}_{L\,min} = S^{1}_{L_1} \, C^{*\prime}_{1} \, S_J \, C^{*}_{1} \, S_{L_1} - I_{m+r}
$$

E naturalmente il coefficiente di covarianza minima e gli intervalli individuati nei paragrafi 5.3 e 5.4 assumono un valore diverso da quello assunto per il modello Lisrel.

INDICI DI INDETERMINATEZZA PER I MODELLI COLLEGATI AL LISREL

i sottomodelli derivati dal Lisrel valgono le nsiderazioni fatte per il modello generale.

fatti pur mutando la struttura delle matrici dei efficienti e di varianze covarianze, tali matrici in tutti sottomodelli conservano la proprieta' di essere matrici eali e, per le matrici di varianze covarianze, anche rammiane.

Valendo tali proprieta' rimangono valide anche i teoremi e le dimostrazioni inerenti l'esistenza di soluzioni, la struttura della soluzione generale e il calcolo della matrice di varianze covarianze minima tra le soluzioni equivalenti. Le matrici di covarianza minima hanno la seguente struttura per i modelli che possono essere intesi quali sottomodelli del Lisrel:

MOD.SEMPLICE
DI MISURA

(5.55)

$$S_{L\,min} = 2 \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_J \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & ; & I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

PATH ANALYSIS

(5.56)

$$S_{L\,min} = 2 \begin{bmatrix} S_T & & 0 \\ & S_E & \\ 0 & & S_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P'(I-A)'L_X' & ; & L_Y' \\ I_m & ; & 0 \\ 0 & ; & I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_1 ; S_2 \\ S_3 ; S_4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P; & I_m & ; 0 \\ L_X & ; 0 & ; I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & & 0 \\ & S_E & \\ 0 & & S_D \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & & 0 \\ & S_E & \\ 0 & & S_D \end{bmatrix}$$

AN.FATTORIALE;

(5.57)

$$S_{L\,min} = 2\begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_X' \\ I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_J \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_X \; ; \; I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

AN. FATTORIALE
2° ORDINE;
MODELLO
ACOVS

(5.58)

$$S_{L\,min} = 2\begin{bmatrix} S_T & & 0 \\ & S_G & \\ 0 & & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P'(I-A)'^{-1} L_X' \\ (I-A)'^{-1} L_X' \\ I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_J \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} P ; \; L_X (I-A)^{-1} \; ; \; I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & & 0 \\ & S_G & \\ 0 & & S_E \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & & 0 \\ & S_E & \\ 0 & & S_D \end{bmatrix}$$

QUASI

SIMPLEX

(5.59)

$$S_{L\,min} = 2 \begin{bmatrix} S_G & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (I-A')^{-1} L_X' \\ I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_J \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_X (I-A)^{-1} \; ; \; I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_G & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_G & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

AN. ;

(5.60)

$$S_{L\,min} = 2 \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_X' \\ I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_J \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_X \; ; \; I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_E \end{bmatrix}$$

LISREL
VERSIONE
ORIGINALE

(5.61)

$$S_{L\,min} = 2 \begin{bmatrix} S_T & & & 0 \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ 0 & & & S_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P'(I-A)'^{-1} & ; & I_m \\ (I-A)'^{-1} & ; & 0 \\ I_m & ; & 0 \\ 0 & ; & I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_1 \; ; \; S_2 \\ \\ S_3 \; ; \; S_4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} (I-A)^{-1}P; & (I-A)^{-1} & ; \; I_m & ; \; 0 \\ I_r & ; \quad 0 & ; \; 0 & ; \; I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_T & & & 0 \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ 0 & & & S_D \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S_T & & & 0 \\ & S_G & & \\ & & S_E & \\ 0 & & & S_D \end{bmatrix}$$