Capitolo 3

L'IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI NEL MODELLO LISREL E NEI MODELLI DA ESSO DERIVATI

3.1. IL PROBLEMA DELL'IDENTIFICABILITA' NEL MODELLO LISREL

Si considerino i primi due momenti delle variabili osservate e latenti e degli errori del modello:

$$(3.1) \quad J1' = CL1' = 0$$

$$(3.2) \quad S_J = C\, S_L\, C'$$

con:

$$(3.3) \quad C = \begin{bmatrix} L_X (I-A)^{1} F & ; & L_X (I-A)^{-1} & ; & I_m & ; & 0 \\ L_Y & ; & 0 & ; & 0 & ; & I_r \end{bmatrix}$$

matrice dei coefficienti di dimensioni (m+r,m+r+p+q);

$$S_L = \begin{bmatrix} S_T & & & 0 \\ & C_G & & \\ & & C_E & \\ 0 & & & S_D \end{bmatrix}$$

matrice di varianze covarianze delle variabili latenti e degli errori di dimensioni (m+r+p+q,m+r+p+q).

La (3.1) e la (3.2) rappresentano i primi due momenti del modello Lisrel e con le opportune condizioni aggiuntive viste nel cap.2', i primi due momenti degli altri modelli presentati come suoi sottocasi.

Cio' premesso, e' possibile iniziare l'affronto del problema dell'unicita' delle soluzioni del modello Lisrel.

Prima condizione perche' le soluzioni del modello siano uniche e' che, dati i primi due momenti delle variabili osservate la matrice dei parametri C sia determinata univocamente. Se cio' non avviene il modello e' definito come non identificabile nei primi due momenti.

Ogni particolare specificazione dei valori dei parametri del modello e' chiamata struttura del modello; le strutture a cui sono associati, in caso di non identificabilita' del modello nei primi due momenti, identici della variabili osservate sono dette strutture equivalenti all'osservazione.

Si dimostra ora che il modello Lisrel e i modelli menzionati quali suoi sottocasi non sono identificabili se non sono posti vincoli aggiuntivi.

Si consideri la matrice di varianze-covarianze (3.2).

Postmoltiplicando la matrice dei parametri C per una qualunque matrice non singolare Q di dimensioni (m+rp+q,m+r+p+q) e premoltiplicando la matrice S_L di varianze-covarianze delle variabili latenti e degli errori per la matrice inversa di Q, Q^{-1} si ottiene:

$$(3.4) \qquad S_J = C\,Q\,Q^{-1}\,S_L\,Q'^{-1}\,Q'\,C'$$

$$= C^*\,S^*_L\,C^{*'} = C\,S_L\,C'$$

con $C^* = CQ$ famiglia di matrici di dimensioni (m+r+p+q,m+r+p+q).

$S^*_L = Q^{-1}\,S_L$ famiglia di matrici di varianze covarianze delle variabili latenti e degli errori di dimensioni (m+rp+q,m+r+p+q).

A differenti matrici di varianze covarianze delle variabili latenti e degli errori S^*_L e a differenti matrici di parametri C^* corrisponde la medesima matrice di varianze covarianze delle variabili osservate S_J. Se ne deduce la non identificabilita' dei modelli.

3.2. CONDIZIONE NECESSARIA PER L'IDENTIFICABILITA'

Jöreskog (1978, 1982), nel presentare il problema per il modello Lisrel propone di considerare una condizione necessaria per l'identificabilita'.

Ogni elemento della matrice di varianze covarianze della matrice S_J puo'essere considerato come funzione dei valori ignoti da stimare: coefficienti parametrici della matrice C e elementi della matrice di varianze covarianze delle variabili latenti S_L non aventi valore numerico prefissato (es. 0,1).

Si hanno in un modello con m+r variabili osservate (1/2)*(m+r)*(m+r+1) equazioni del tipo :

$$(3.5) \qquad s_{x_i y_j} = f\,(L_X, L_Y, P, A, S_T, S_G, S_E, S_D)$$

Se il numero di elementi di S_L ed C aventi valore non prefissato e' superiore a quello delle equazioni (3.5) il modello non e' identificabile per le note proprieta' riguardanti le condizioni di risolubilita' dei sistemi lineari. Questa condizione permette di verificare che molti modelli non sono sicuramente identificabili. Infatti il modello di path analysis, l'analisi fattoriale del second'ordine, il Lisrel nella sua versione definitiva sono sicuramente sempre non identificabili se non sono posti a priori vincoli sui parametri ; il modello di insiemi cogenerici, l'analisi fattoriale, il modello Lisrel nella sua versione originale se non sono rispettate determinate proporzioni tra numerosita' variabili osservate e latenti sono anch'essi non identificabili.

3.3. RICERCA DI CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'IDENTIFICABILITA'

Si dimostra che anche qualora siano rispettate condizioni necessarie per l'identificabilita' del modello, analogamente a quanto avviene per il modello fattoriale (Howe 1955, Anderson Rubin 1956, Jöreskog 1966) non e' possibile stabilire a priori condizioni sufficienti per l'identificabilita' del modello stesso.

Jöreskog (1982 p.77) per ovviare ai problemi derivanti dalla non identificabilita' propone di vincolare in modo empirico nei vari modelli un numero adeguato di parametri uguagliando a priori il loro valore a determinati valori numerici(0,1) o ad altri parametri.L'autore stesso ritiene non adeguata la soluzione:"Data la non linerarita' delle equazioni (3.5) soluzioni uniche sono in generale assai difficli da trovare e raramente esistono" (Werts Jöreskog, 1973, p. 89).

"Puo'quindi avvenire che la scelta tra due o piu' equivalenti parametrizzazioni per il modello Lisrel sia affidata unicamente alla soggettiva interpretazione dei risultati (Jöreskog 1982, p. 196).Non e' percio possibile porre a priori alcun insieme di condizioni generali necessarie e sufficienti per l'identificazione dei modelli considerati.

3.4. ALCUNE INDICAZIONI UTILI PER L'IDENTIFICAZIONE DEL MODELLO LISREL

Tenendo conto delle condizioni poste su parametri e variabili del modello Lisrel e ricordando le dimostrazioni di Haagen (1983) relative al modello fattoriale, si puo' tentare di individuare almeno alcuni vincoli cui deve soddisfare la trice di trasformazione Q prima introdotta, perche'tutte le soluzioni equivalenti rispettino le caratteristiche distintive del modello.

Se rimane comunque impossibile una completa identificazione del modello, si delimita la famiglia delle matrici di trasformazione Q compatibili con il modello.

Un ragionevole criterio per l'introduzione di vincoli sulla struttura della matrice Q e' quello che, qualunque sia la configurazione della matrice

$$S^*_L = Q^{-1} S_L Q'^{-1}$$

nelle strutture equivalenti all'osservazione (3.4) sia salvaguardata la struttura della matrice C ,cosi' come appare in (3.3).

A tal scopo e' necessario introdurre alcune condizioni:

1) Innanzitutto, affinche'le matrici dei parametri degli errori in tutte le soluzioni equivalenti sia la matrice identita' e' necessario che la matrice Q abbia la seguente configurazione

$$(3.6) \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & I_{m+r} \end{bmatrix}$$

con Q_1 matrice non singolare di dimensioni (p+q, p+q).

Percio' rilevante per l'identificazione, rimane solo la matrice Q_1.

4) Seconda condizione e' che in tutte le strutture equivalenti la sottomatrice situata nella 2^riga e 2^ colonna della matrice a blocchi dei coefficienti C sia la matrice

e' possibile se la matrice Q ha la seguente configurazione:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{1A} & : & 0 \\ Q_{1B} & : & Q_{2B} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

con la matrice nulla di dimensioni (q,p), la matrice Q_{1A} di dimensioni (q,q) la matrice Q_{1B} di dimensioni (p,q), la matrice Q_{2B} di dimensioni (p,p).

3) La terza condizione si deduce osservando che la sottomatrice

$$L_x \,(I-A) \; \vdots \; P$$

posta nella 1^ riga e 1^ colonna della matrice a blocchi dei coefficenti C e' uguale alla sottomatrice posta nella 1^ riga e 2^ colonna

$$\vdots_x \; (I-A)^{-1}$$

a meno di una matrice moltiplicativa P.

Perche' sia salvaguardata questa struttura nella matrice dei parametri, per ogni soluzione equivalente (3.4) e' necessario che la matrice Q_1 abbia la seguente configurazione:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{1A} & : & 0 \\ 0 & : & I_p \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

con Q_{1A} matrice di dimensioni (q,q) non singolare.

Infatti si osserva che:

$$(3.9)\quad \begin{bmatrix} L_X(I-A)^{-1}P & ; & L_X(I-A)^{-1} & ; & I_m & ; & 0 \\ L_Y & ; & 0 & ; & 0 & ; & I_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{1A} & ; & 0 \\ 0 & ; & I_p \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} L_X(I-A)^{-1}P\,Q_{1A} & ; & L_X(I-A)^{-1} & ; & I_m & ; & 0 \\ L_Y\,Q_{1A} & ; & 0 & ; & 0 & ; & I_r \end{bmatrix}$$

La matrice (3.9) ha la stessa struttura della matrice C in (3.3).

Le condizioni poste permettono di limitare alquanto la famiglia delle matrici di trasformazione Q. Perche' siano preservate le caratteristiche della matrice dei parametri C in tutte le strutture equivalenti a (3.4) la matrice Q deve avere la seguente struttura:

$$(3.10)\qquad Q = \begin{bmatrix} Q_{1A} & 0 \\ 0 & I_{p+m+r} \end{bmatrix}$$

6) Qualora si ponga l'ulteriore condizione che in qualunque struttura equivalente (3.4) le variabili latenti e gli errori nelle equazioni siano sempre incorrelate si giunge a determinare che la matrice Q_{1A} e' una qualunque matrice ortogonale .

Ciò significa che,essendo:

$$S_F = \begin{bmatrix} S_T & 0 \\ 0 & S_G \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$S_F = I_{p+q} \tag{3.11}$$

e anche:

$$S^*_F = Q^{-1}_{1A} \; S_F \; Q'^{-1}_{1A} = I_{p+q} \tag{3.12}$$

Ma, per la (3.12), S^*_F e' in generale uguale a:

$$S^*_F = \left[\begin{array}{ccc} Q^{1}_{1A} \; S_T \; Q'^{-1}_{1A} & ; & 0 \\ 0 & ; & S_G \end{array} \right] \tag{3.13}$$

e nell'ipotesi di incorrelazione delle variabili t_{-h} e g_{-w} in ogni struttura equivalente:

$$S^*_F = \left[\begin{array}{ccc} Q^{-1}_{1A} \; Q'^{-1}_{1A} & ; & 0 \\ 0 & ; & I_p \end{array} \right] = I_{p+q} \tag{3.14}$$

La (3.14) e' verificata se e solo se Q_{1A} e' una matrice ortogonale, come volevasi dimostrare.