

UNIVERSITA' DI TRENTO

Dottorato in Statistica Metodologica

I° CICLO

L'INDETERMINATEZZA DEL  
MODELLO LISREL

Candidato:

GIORGIO VITTADINI

ESAME FINALE

FEBBRAIO - 1987

L'INDETERMINATEZZA  
DEL MODELLO LISREL

GIORGIO VITTADINI

## INDICE

Introduzione.....p.	1
---------------------	---

### Parte Prima

#### INDETERMINATEZZA DEL MODELLO LISREL E SUA VALIDITA' SUL PIANO LOGICO

##### Capitolo 1

IL MODELLO LISREL COME MODELLO DI EQUAZIONI STRUTTURALI.....p.	5
1.1. I modelli di equazioni strutturali.....p.	5
1.2. Modelli di errori di misura.....p.	7
1.3. Path analysis.....p.	9
1.3.1. Definizione.....p.	9
1.3.2. Path analysis ad equazioni simulta- nee con variabili latenti.....p.	12
1.4. Il modello Lisrel.....p.	15

##### Capitolo 2

IL MODELLO LISREL COME MODELLO PER L'ANALISI DELLA STRUTTURA DELLE COVARIANZE.....p.	20
2.1. Introduzione.....p.	20
2.2. Modelli collegati al modello Lisrel.....p.	22
2.2.1. Modello di piu' misurazioni cogeneriche.. p.	22
2.2.2. Analisi dei fattori.....p.	23
2.2.3. Analisi fattoriale di 2° ordine.....p.	24
2.2.4. Modello simplex.....p.	26
2.2.5. Modello ACOVS.....p.	28
2.2.6. Analisi delle componenti della varianza...p.	29
2.3. Sottomodelli del Lisrel.....p.	31
2.3.1. Modello senza errori nelle equazioni con legame lineare tra le variabili latenti(M1).....p.	31
2.3.2. Modello con legame lineare fra le va- riabili e una sola equazione di misu- ra(M2).....p.	32

2.3.3. Modello senza variabili latenti di pendenti nel sistema di equazioni strutturali(M3).....	p. 32
2.3.4. Modello senza path analysis(M4).....	p. 33
2.3.5. Sintesi.....	p. 34
Capitolo 3	
L'IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI NEL MODELLO LISREL E NEI MODEL LI AD ESSO COLLEGATI.....	p. 36
3.1. Il problema dell'identificabilit� nel mode lo Lisrel.....	p. 36
3.2. Condizione necessaria per l'identificabili- ta'.....	p. 38
3.3. Ricerca di condizioni sufficienti per l'i- dentificabilit�.....	p. 39
3.4. Alcune indicazioni per l'identificazione del modello Lisrel.....	p. 39
Capitolo 4	
INDETERMINATEZZA DEL MODELLO LISREL: APPROCCIO ANALITICO.....	p. 44
4.1. Introduzione.....	p. 44
4.2. Condizioni per l'esistenza di soluzioni.....	p. 45
4.3. Struttura delle soluzioni: condizioni sufficienti.....	p. 51
4.3.1. Posizione del problema.....	p. 51
4.3.2. Componente fissa della soluzione.....	p. 53
4.3.3. Componente variabile della soluzione.....	p. 55
4.4. Struttura delle soluzioni: condizioni necessarie.....	p. 57
Capitolo 5	
INDICI DI INDETERMINATEZZA E LORO INTERPRETAZIONE.....	p. 60
5.1. Introduzione.....	p. 60
5.2. Coefficiente di covarianza media minima.....	p. 61
5.3. 1^ intervallo per il coefficiente di covarianza minima:.....	p. 65
5.4. 2^ intervallo per il coefficiente di covarianza media:.....	p. 68
5.5. Relazione tra matrice di covarianza minima e altre grandezze.....	p. 74

5.5. Modello Lisrel e incorrelazione di variabili latenti ed errori.....p.	79
5.7. Indici di indeterminazione per i modelli collegati al Lisrel.....p.	81
Capitolo 6	
PROPRIETA' LOGICAMENTE INCONSISTENTI DI SOLUZIONI INDETERMINATE.....p.	
6.1. Introduzione..... p.	86
6.2. L'indeterminatezza del modello: approccio algebrico.....p.	86
6.3. L'indeterminatezza: insufficienza delle informazioni provenienti dalle osservazioni.....p.	91
6.4. Indeterminatezza di variabili addizionali.....p.	93
6.5. Permanenza dell'indeterminatezza.....p.	100
6.6. 1° Teorema logicamente inconsistente sulla correlazione tra variabili latenti, osservate, addizionali.....p.	101
6.7. 2° Teorema logicamente inconsistente sulla correlazione tra variabili latenti, osservate, addizionali.....p.	108
6.8. 3° Teorema logicamente inconsistente sulla correlazione tra variabili latenti, osservate, addizionali.....p.	114
6.9. I tre teoremi per i sottomodelli e gli altri modelli.....p.	118
Capitolo 7	
CONCLUSIONI.....p.	
7.1. Ragioni analitiche dell'indeterminatezza.....p.	121
7.2. Misurazione dell'indeterminatezza.....p.	122
7.3. Proprieta' logicamente inconsistenti delle soluzioni.....p.	126
Parte Seconda	
APPLICAZIONE E VERIFICA DEGLI ASSUNTI TEORICI	
Introduzione.....p.	130
1.2. Informazioni sui modelli presentati.....p.	131
1.3. Risultati.....p.	133
3.1. Analisi fattoriale 1° caso.....p.	133

3.2.	Analisi fattoriale 2° caso.....p.	135
3.3.	Analisi varianza 1° caso.....p.	137
3.4.	Analisi varianza 2° caso.....p.	139
3.5.	Simplex 1° caso.....p.	141
3.6.	Simplex 2° caso.....p.	143
3.7.	Simplex 3° caso.....p.	145
3.8.	Simplex 4° caso.....p.	147
3.9.	Lisrel versione originale.....p.	152
3.10.	Lisrel 1° caso.....p.	154
3.11.	Lisrel 2° caso.....p.	156
3.12.	Lisrel 3° caso.....p.	158
4.	Coefficienti di correlazione minima per ogni variabile.....p.	160
5.	Coefficienti di covarianza media minima.....p.	163
6.	Coefficiente di correlazione media minima.....p.	163
7.	Coefficienti di covarianza media minima minima per variabili latenti ed errori in correlati e standardizzati.....p.	164
	Conclusioni.....p.	164
	BIBLIOGRAFIA.....p.	165

## INTRODUZIONE

Nel dibattito inerente l'analisi fattoriale particolare attenzione ha avuto il tema della non unicità delle sue soluzioni.

Alcuni autori (Reiersol 1950, Howe 1955, Anderson Rubin 1956, Lawley Maxwell 1963, Jöreskog 1967, Haagen 1983) hanno affrontato il problema dell'identificabilità del modello, ricercando condizioni necessarie e sufficienti perché, data la distribuzione delle variabili osservate, i valori dei parametri del modello siano unici.

Altri autori (Piaggio 1931, Ledermann 1938, Kestelman 1952, Guttman 1955, Heerman 1964, Heerman 1966, Schönemann 1971, Schönemann Wang 1972, Schönemann Steiger 1978, Schönemann Haagen 1986) hanno messo in luce il problema dell'indeterminatezza dei valori dei fattori, per cui, in generale, le soluzioni non sono uniche anche qualora i parametri del modello siano perfettamente identificati.

Un secondo argomento di ricerca inerente l'analisi fattoriale che ha incontrato particolare favore in letteratura è stato quello della costruzione di modelli derivati dal modello fattoriale ma caratterizzati da maggiore generalità. In questo ambito si colloca la proposta di Jöreskog (1973, 1977, 1978, 1982) di un modello di analisi statistica multivariata, il modello Lisrel, atto ad analizzare le relazioni di tipo lineare esistenti tra due insiemi di variabili latenti. Il Lisrel è stato presentato sia quale modello di equazioni strutturali con errori nelle variabili sia quale modello di analisi della struttura delle covarianze di particolare generalità. Infatti, oltre al modello fattoriale possono essere visti quali suoi sottocasi

numerosi altri modelli con variabili latenti, quali i modelli di misura, il modello di path analysis con variabili latenti, il modello di misurazioni cogenetiche, il modello simplex, i modelli di analisi fattoriale di ordine superiore, il modello di analisi delle componenti della varianza.

Per ciò che concerne le soluzioni del modello Lisrel, mentre è stato analizzato almeno in parte da Jöreskog il problema dell'identificabilità, nessun autore ha mai analizzato il problema dell'indeterminatezza. Scopo principale di questo lavoro è perciò offrire un primo contributo all'affronto di questa tematica.

Dopo aver descritto, nei primi due capitoli, le caratteristiche del modello Lisrel in relazione agli altri modelli sopra menzionati, si mettono in luce, nel terzo capitolo, alcuni aspetti inediti del problema dell'identificabilità dei suoi parametri.

Successivamente si affronta il problema dell'indeterminatezza delle soluzioni.

Nel capitolo quarto l'individuazione delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione del modello permette di verificare che sotto il profilo analitico l'indeterminatezza delle variabili latenti è dovuta all'esistenza di una componente variabile nella soluzione stessa. Nel capitolo quinto la costruzione della matrice di covarianza tra soluzioni differenti porta ad individuare una misura dell'indeterminatezza e ad analizzarne le relazioni con gli autovalori della matrice di covarianza delle soluzioni. Nel capitolo sesto, la riproposizione del problema dell'indeterminatezza delle soluzioni permette di verificare che soluzioni indeterminate sono caratterizzate



proprietà inconsistenti sul piano logico.

Una riflessione sui risultati raggiunti e una applicazione empirica, che permette di rivelare l'esistenza di covarianze negative tra variabili latenti di soluzioni differenti, concludono il lavoro.