Capitolo 2

IL MODELLO LISREL COME MODELLO PER L'ANALISI DELLA STRUTTURA DELLE COVARIANZE

2.1. INTRODUZIONE

Jöreskog definisce come analisi della struttura delle covarianze quelle tecniche aventi lo scopo analizzare dati multivariati che permettono di individuare le cause latenti di variazioni e covariazioni di misure osservate (Jöreskog 1981).

A partire da questa definizione egli puo' riclassificare numerosi modelli di analisi multivariata con variabili latenti (modelli di misura, analisi fattoriale, analisi delle componenti della varianza, modello simplex, analisi fattoriale del second'ordine) quali casi particolari di un modello di analisi della struttura delle covarianze.

Secondo questa impostazione ad ogni particolare matrice di varianze e covarianze sottostanno "a specified substantive theory or hypothesis, a given classificatory design for the measures, known experimental conditions ." (Jöreskog 1981).

Jöreskog mostra (1970, 1978, 1981) che questi modelli sono casi particolari di un modello generale di analisi della struttura delle covarianze detto modello Acovs.

Successivamente Jöreskog (1981) presenta il modello Lisrel quale modello di analisi delle strutture delle covarianze di ancor maggior generalita' in quanto la sua matrice di varianze-covarianze ammette come suoi sottocasi la matrice di varianze-covarianze del modello Acovs e degli altri sottomodelli menzionati.

In questa ottica,la matrice di varianze-covarianze delle variabili osservate del modello Lisrel S_J e' definita dalle seguenti ipotesi:

a) ogni varianza e covarianza delle variabili osservate e' definita come funzione delle matrici dei parametri e delle matrici di varianze-covarianze di variabili latenti ed errori:

$$(2.1.)\qquad s_{x_i y_j} = f\,(L_X, L_Y, P, (I-A)^{-1}, S_T, S_G, S_E, S_D)$$

le funzioni $s_{x_i y_j}$ sono continue con derivata prima continua.

b) la matrice S_J e' definita positiva nei punti di ammissibilita' dei parametri.

c) la distribuzione multivariata delle variabili osservate e' ben descritta dal 1^ e 2^ momento cosicche' le informazioni aggiuntive date dai momenti di ordine superiore possono essere ignorate.

Il modello Lisrel cosi' definito come analisi di struttura delle covarianze consente di definire quali suoi sottocasi numerosi altri modelli di analisi delle strutture delle covarianze.

Ne consegue che trattare dei problemi relativi all'indeterminatezza e all'identificazione del modello Lisrel significa in realta' affrontare tale problema per una vasta famiglia di modelli molto noti nella letteratura statistica.

Si mostrano percio' le principali caratteristiche di modelli le cui matrici di varianze-covarianze possono essere intese quali casi particolari della matrice di varianze-covarianze del modello Lisrel.

2.2 MODELLI COLLEGATI AL LISREL

2.2.1 Modello di piu' misurazioni cogeneriche

Si denominano misurazioni cogeneriche gli insiemi di n misurazioni relative a un medesimo oggetto.

Il modello di piu' insiemi di misurazioni cogeneriche, insiemi di misurazioni relative a piu' oggetti, assume la seguente formulazione:

$$X = AT + E \qquad (2.2)$$

con:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$$

matrice di dimensioni (m,n) delle misurazioni osservate su m oggetti, variabili centrate; l'i-esimo vettore x_i e' l'insieme di misurazioni relative all'i-esimo oggetto;

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ t_i \\ \cdot \\ t_m \end{bmatrix}$$

matrice di dimensioni (m,n) delle misurazioni, "vere"; l'i-esimo vettore t_i e' l'insieme di misurazioni vere relative all'i-esimo oggetto tutte uguali in quanto si ipotizza che le differenze nei valori delle misurazioni osservate dipendono da errori di misurazione ; si ipotizza inoltre che i vettori t_i sono standardizzati, vale a dire tali che :

$$t_i 1' = 0 \ ; \quad t_i t_i' = 1;$$

A matrice diagonale di dimensioni (m,m) di coefficienti parametrici;

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ e_i \\ \cdot \\ e_m \end{bmatrix}$$

matrice di dimensioni (m,n) degli errori di misurazione, latenti centrate; l'i-esimo vettore e_i e' l'insieme degli errori di misurazione relativo all'i-esimo oggetto;

Si assume inoltre che:

gli errori di misura sono incorrelati tra loro e con le misurazioni "vere"

(2.3) $\quad \varepsilon_{-i} \, \varepsilon_{-j}' = 0 \qquad (i \neq j; i, j = 1, 2 \ldots m)$

$TE' = 0$.

La matrice di varianze-covarianze del modello precedente assume quindi la seguente formulazione:

(2.4) $$S_X = A S_T A' + S_E$$

con S_T matrice di covarianza delle misurazioni "vere" ;

S_E matrice diagonale di covarianza degli errori.

2.2.2. Analisi dei fattori

Al fine di individuare le p cause comuni ignote che hanno determinato il verificarsi, nel loro complesso, di osservazioni effettuate su m ($m > p$) variabili e le cause specifiche che sono all'origine delle osservazioni su ogni specifica variabile e' stato proposto, ormai da molti anni (Spearman 1927, Thurstone 1947) il modello di analisi fattoriale, che, come e' noto, assume la seguente formulazione:

(2.5) $$X = AT + E$$

con:

X matrice di dimensioni (m,n) delle variabili osservate centrate;

A matrice dei "factor loading" di dimensione (m, p);

T matrice di dimensioni(m,p) dei fattori comuni, latenti e standardizzati;

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ e_i \\ \cdot \\ e_m \end{bmatrix}$$ matrice di dimensioni (m,n) dei fattori specifici, latenti e centrati ;

Nell'ipotesi di incorrelazione tra fattori comuni e specifici:

(2.6) $TE' = 0$;

e di incorrelazione dei fattori specifici tra loro:

(2.7) $e_i \, e_j' = 0 \qquad (i \neq j; i,j=1,2...m)$

la matrice varianze-covarianze del modello ha la seguente configurazione:

(2.8) $$S_X = A \, S_T \, A' + S_E$$

con

S_T matrice di correlazione dei fattori comuni;

S_E matrice diagonale delle varianze covarianze dei fattori specifici.

Nella "factor analysis" tradizionale, di tipo esplorativo, nulla e' assunto a riguardo dei valori degli elementi della matrice dei coefficienti. E' stata anche proposta una analisi fattoriale di tipo confermativo (Joreskog Lawley 1968; Joreskog 1970), modello che permette di tenere conto delle informazioni possedute attraverso l'assunzione a priori di una particolare struttura per la matrice dei coefficienti, o delle matrici di varianze-covarianze dei fattori.

2.2.3. Analisi fattoriale di second'ordine

E' stata proposta anche una analisi fattoriale di ordine superiore (Joreskog 1970) applicabile ai casi in cui si suppone che i fattori comuni siano originati a loro volta da cause comuni e specifiche logicamente precedenti. Nel caso di modelli di 2^ ordine si ha che i fattori comuni del modello (2.5) sono a loro volta generati dai fattori comuni e dai fattori specifici del 2^ ordine attraverso la seguente relazione:

$$T = BF + D \tag{2.9}$$

ove:

B di dimensioni (p,q) e' la matrice dei coefficienti fattoriali del second'ordine

$$F = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \cdot \\ \underline{f}_g \\ \cdot \\ \underline{f}_q \end{bmatrix}$$ F e'la matrice di dimensione (q,n) dei fattori comuni del second'ordine,variabili latenti standardizzate

$$D = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \cdot \\ \underline{d}_1 \\ \cdot \\ \underline{d}_p \end{bmatrix}$$ D e'la matrice di dimensioni (p,n)dei fattori specifici del second'ordine, variabili latenti centrate

Valendo per il modello (2.9) l' ipotesi di incorrelazione tra fattori specifici e comuni:

$$FD' = 0 \tag{2.10}$$

e di incorrelazione dei fattori specifici tra loro:

$$\underline{d}_l \, \underline{d}_k' = 0 \qquad (l \neq k; k,l=1,2...p) \tag{2.11}$$

la matrice di varianze-covarianze del modello (2.9) e' la seguente:

$$S_T = B S_F B' + S_D \tag{2.12}$$

con S_F matrice di correlazione dei fattori comuni del 2^

ordine;

S_D matrice diagonale di variianze-covarianze dei fattori specifici del 2^ ordine.

Il modello fattoriale del 2^ ordine in forma ridotta assume quindi la seguente formulazione:

(2.13) $$X = A\,[BF + D] + E$$

e assumendo l'ipotesi di incorrelazione tra fattori specifici e_i e fattori comuni e specifici del second'ordine f_g e d_l :

(2.14) $$FE' = 0\ ;\ DE' = 0\ ;$$

la matrice di varianze-covarianze del modello fattoriale di second'ordine assume la seguente formulazione:

(2.15) $$S_X = A\,[B\,S_F\,B' + S_D]\,A' + S_E$$

2.2.4. Modello simplex

I modelli di analisi di insiemi di risposte ordinate prendono in considerazione insiemi di medesime o simili misurazioni ordinate, ripetute nel tempo sugli stessi oggetti, correlate fra loro .

Il modello assume la seguente configurazione:

(2.16) $$X = K\,V$$

con:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_t \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$$

X matrice di dimensioni (m,n)delle misurazioni osservate ,variabili centrate;il vettore x_t rappresenta la misurazione osservata al tempo t .

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ v_t \\ \cdot \\ v_m \end{bmatrix}$$

V matrice di dimensioni (m,n) di incrementi variabili latenti centrate; il vettore v_t rappresenta l'incremento al tempo t ed e' uguale a:

$$v_t = \begin{cases} x_t - x_{t-1} & \text{per } t \geq 2 \\ x_1 & \text{per } t = 1 \end{cases}$$

K matrice triangolare bassa di coefficienti parametrici di dimensione (m,m).

A secondo della struttura della matrice K si possono avanzare ipotesi differenti sulla struttura della correlazione fra misurazioni in tempi differenti. Ad esempio qualora la matrice K assuma la seguente configurazione :

$$(2.17) \quad K = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ k_2 & 1 & & & \\ k_2 k_3 & . & 1 & & \\ . & & . & 1 & \\ \prod_{i=1}^{m} k_i & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

si ha il modello denominato simplex, in cui si ipotizza una relazione di tipo autoregressivo tra le misurazioni.

Nell'ipotesi di incorrelazione fra incrementi relativi a diversi momenti nel tempo:

$$(2.18) \quad v_t v'_{t+s} = 0 \qquad (t \neq s; t,s=1,2....m);$$

la matrice di varianze covarianze del modello assume la seguente formulazione:

$$(2.19) \qquad S_J = K S_V K'$$

con:

S_V matrice diagonale di varianza-covarianza degli incrementi

Introducendo gli errori di misura il modello (2.19) diviene:

(2.20) $$X = KV + E$$

con:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ e_i \\ \cdot \\ e_m \end{bmatrix}$$ E matrice di dimensioni (m,n)degli errori di misurazione , variabili latenti centrate;

Assumendo che gli errori di misura siano incorrelati tra loro e con gli incrementi:

(2.21) $VE' = 0$; $e_i e_j' = 0$ $(i \neq j; i,j=1,2..m)$;

si ha la seguente configurazione per la matrice di varianze e covarianze del modello (2.20):

(2.22) $$S_X = K S_V K' + S_E$$

con

S_E matrice diagonale delle varianze-covarianze degli incrementi

2.2.5. Modello ACOVS

Si e' gia' accennato, all'inizio del capitolo 2^, al significato del modello ACOVS.

Resta solo da aggiungere che, dal punto di vista formale, il modello e' identico al modello di analisi fatturiale del second'ordine.

2.2.6 Analisi delle componenti della varianza

Nell'approccio di numerosi autori (Wiley Schmidt Bramble 1973) l'analisi della strutlura delle covarianze e'presentata come metodo per verificare quale sia l'incidenza di p variabili, chiamate fattori, sugli m punteggi conseguiti in un insieme di tests da n soggetti.

I fattori che influenzano i risultati dell'esperimento sono suddivisibili in una componente fissa (dovuta alle caratteristiche dei soggetti su cui e' effettuato l'esperimento),in componenti variabili (dovute a particolari trattamenti effettuati o condizioni particolari nelle quali si svolgono sottoinsiemi di prove dell'insieme delle prove in cui si articolano i tests),e componenti interazione tra le componenti fisse e variabili(dovute all'interazione tra piu' trattamenti o condizioni presenti contemporaneamente in un sottoinsieme di prove dei tests).

Formalmente il modello puo'essere rappresentato nel seguente modo:

$$X = \Pi T + E \tag{2.23}$$

ove :

$$X = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \cdot \\ \underline{x}_i \\ \cdot \\ \underline{x}_m \end{bmatrix}$$

X e'la matrice di dimensioni (m,n)dei punteggi conseguiti nel test, variabili osservate centrate; $\underline{x}_i$ e'il punteggio conseguito nell'i-esima prova del test.

$$T=\begin{bmatrix} w \\ \cdot \\ t_{-1} \\ \cdot \\ t_{-g} \\ \cdot \\ t_{-p} \end{bmatrix}$$

T e'la matrice di dimensioni (p+1,n) delle componenti fattoriali fissa (w) e variabili t_{-g} ,variabili latenti centrate

$$F=\begin{bmatrix} e_{-1} \\ \cdot \\ e_{i} \\ \cdot \\ e_{-m} \end{bmatrix}$$

E e'la matrice di dimensioni (m,n) delle componenti interazione, variabili latenti centrate

$$H=\begin{bmatrix} 1.......0..0\ ...1 \\ 1\ 0....1...1....0 \\ .... \\ 1\ 0..1..0........ \\ 1......0.1......1 \end{bmatrix}$$

H e'la matrice di dimensioni (m,p+1) dei parametri che segnalano la presenza (1) o l'assenza (0) di componenti fisse o variabili nelle prove in cui si articola il test.

Nell' ipotesi di incorrelazione tra ogni componente interazione, variabile ,fissa:

(2.24) $e_{-i}e'_{-j} = 0 \quad (i\neq j;i,j=1,2....m);$

$wt_{-g} = 0 \quad ;$

$t_{-h}t_{-g} = 0 \quad (h\neq g;h,g=1,2...p) \;;$

$TE'=0$.

la matrice di varianze covarianze del modello (2.22) e'

(2.25) $S_X = H S_W H' + S_E$

con :

S_W ed S_E matrici diagonali di varianze-covarianze di componenti fisse, variabili, interazione.

2.3. SOTTOMODELLI DEL LISREL

Dal modello Lisrel generale possono essere ricavati sottomodelli in caso di assenza di uno o piu' insiemi di variabili nella formula (1.22). Casi particolari di questi sottomodelli per determinati valori delle matrici di parametri e di varianze-covarianze delle variabili latenti sono i modelli indicati nei paragrafi 1.1 e 2.2.
Si considerano i sottomodelli con variabili latenti utili per la trattazione successiva.

2.3.1. Modello senza errori nelle equazioni con legame lineare fra le variabili latenti (M1)

Nell'ipotesi che le variabili z_w siano spiegate perfettamente, nel senso della regressione multipla dalle variabili t_h si ha nel sistema di equazioni strutturali:

(2.26) $$Z = AZ + PT$$

e quindi:

(2.27) $$Z = (I-A)^{-1} PT$$

Sostituendo i valori della matrice Z nelle equazioni di misura e ponendo:

$$V_1 = \begin{bmatrix} L_x (I-A)^{-1} \\ L_y \end{bmatrix} ; \quad J = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}$$

si ottiene il modello in forma ridotta:

(2.28) $$J = V_1 T + H$$

e, date le ipotesi di incorrelazione tra variabili latenti e errori nelle variabili valide per il modello generale la matrice di varianze covarianze e':

$$(2.29)\quad S_J = V_1 S_T V_1' + S_H$$

con S_T e S_E matrici di varinze covarianze delle variabili latenti e degli errori.

2.3.2. Modello con legame lineare fra le variabili latenti e una sola equazione di misura (M2)

Nell'ipotesi che siano state effettuate osservazioni solo sulle variabili x_i il modello strutturale in forma ridotta e':

$$(2.30)\quad Z = (I-A)^{-1} PT + (I-A)^{-1} G$$

L'unica equazione di misura, dopo la sostituzione dei valori ricavati dalla (2.30), assume quindi la seguente formulazione:

$$(2.31)\quad X = L_X (I-A)^{-1} [PT + G] + E$$

con matrice di varianze-covarianze

$$(2.32)\quad S_X = L_X [I-A]^{-1} [P S_T P' + S_G](I-A')^{-1} L_X' + S_E$$

2.3.3. Modello senza variabili latenti dipendenti nel sistema di equazioni strutturali (M3)

Nell'ipotesi che le variabili latenti z_w siano perfettamente spiegate,nel senso della regressione multipla dagli errori nelle equazioni g_w ,il modello strutturale in forma ridotta e':

$$(2.33)\quad Z = (I-A)^{-1} G$$

Sostituendo i valori ricavati da (2.33) nell'equazione di misura si ottiene :

(2.34) $$X = L_X (I-A)^{-1} G + E$$

In forza dell'ipotesi di incorrelazione tra errori nelle equazioni e nelle variabili la matrice di varianze covarianze e':

(2.35) $$S_X = L_X (I-A)^{-1} S_G (I-A')^{-1} L_X' + S_E$$

2.3.4. Modello senza path analysis (M4)

In assenza di legame lineare tra variabili latenti ed errori nelle equazioni si hanno solo i modelli di misura:

(2.36) $$X = L_X Z + E$$

(2.37) $$Y = L_Y T + D$$

Data l'incorrelazione tra variabili latenti ed errori di misura si hanno le seguenti matrici di varianze covarianze

(2.38) $$S_X = L_X S_Z L_X' + S_E$$

(2.39) $$S_Y = L_Y S_T L_Y' + S_D$$

3.5. Sintesi

Si puo' ora mettere in luce esplicitamente che i modelli presentati nei capitoli 1^ e 2^ sono tutti casi particolari dei sottomodelli (2.3.1),(2.3.2),(2.3.3),(2.3.4) e del modello generale. Dato il modello Lisrel generale in forma ridotta:

$$\begin{bmatrix} y \\ \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_Y (I-A)^{1} F & ; & L_X (I-A)^{1} \\ \\ L_Y & ; & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} T \\ \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ \\ D \end{bmatrix}$$

si possono ricavare i sottomodelli del Lisrel e i modelli ad essi collegati nel seguente modo:

Sottomodello Modello	2.3.1 (G=0)	2.3.2 (Y=0)	2.3.3 (T=0)	2.3.4 [A=G=0]
1.Misura			A=0 S_E diagonale	$L_X = I_m$ $L_Y = I_r$ mod.semplice di misura
2.Path analysis	S_E S_D diagonali			
3.An.fattoriale			A=0 S_G matrice di correlazione	S_T matrice di correlazione
4.Misure cogeneriche			A=0 L_X diagonale a blocchi; S_E diagonale	L_X diagonale a blocchi; S_E diagonale
5.Quasi simplex			A=0 L_X autoregressiva bassa; S_G S_E diagonali	
6.An.fattoriale 2^ordine		A=0		
7.An.varianza			A=0 con valori 0,1 S_T S_E diagonali	